

Analisi Matematica 1, 18/06/24 - Canale A-L

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: 40 minuti.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Dimostrare per induzione che il numero $n^3 - n + 6$ è divisibile per 3 per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. Sia $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Scrivere le definizioni seguenti e le loro negazioni
 - a. x_0 punto di accumulazione per A ,
 - b. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
3. Enunciare il teorema di Lagrange e dimostrarlo.
4. Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dire se la seguente affermazione è vera o falsa e giustificare

se $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

① Per $n=0$ l'affermazione è vera.
perché $0^3 - 0 + 6 = 6$ div per 3.

Supponiamo vera per $n=k$ e proviamo
che vero per $n=k+1$.

Per ipotesi $k^3 - k + 6 = 3d$ per $d \in \mathbb{N}$.

Allora

$$(k+1)^3 - (k+1) + 6 =$$

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 + 6$$

$$= \cancel{k^3} + \cancel{3k} k^3 - k + 6 + 3(k^2 + k)$$

$$= 3d + 3(k^2 + k) \quad \text{div per 3.}$$

② e ③ vedere corso.

④ Falso. Un controesempio è
 $f(x) = \sin(x^2)$.

$$f(x) = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\text{ma } |f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Analisi Matematica 1, 18/06/24 - Canale A-L

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Calcolare l'insieme di tutte le primitive

$$\int \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) dx$$

ed in particolare la primitiva F che soddisfa $F(0) = 1$.

(ii) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+1) \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

(i) Per parti

$$\int \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= x \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \int x \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$$

$$= x \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + \int \frac{x}{1+(x+1)^2} dx.$$

$$= x \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{1+(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx$$

$$= x \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{2} \log(x^2+2x+2) - \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Sia $F(x) = x \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + C$

$$F(0) = 0 + \frac{1}{2} \log(2) - \arctan(1) + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4} + C = 1.$$

$$\Rightarrow C = 1 + \frac{\pi}{4} - \log \sqrt{2}.$$

(ii) Si risolve per separazione di var

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) dx$$

da cui

$$\log(y+1) = F(x) + k$$

$$y(x) = e^{F(x)+k} - 1.$$

$$y(0) = e^{F(0)+k} - 1$$

e si conclude.

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \arctan(|x|e^{1-x}).$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato con i calcoli necessari a una minima giustificazione rispettando gli spazi):

- il dominio (o dominio naturale) D di f .

$$D = \mathbb{R}$$

- i limiti notevoli di f :

$$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arctan(0) = 0$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

solo asintoti orizzontali
come sopra.

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

$$\begin{aligned} \text{per } x > 0 \quad f'(x) &= \frac{1}{1+x^2 e^{2-2x}} \cdot (e^{1-x} - x e^{1-x}) \\ &= \frac{(1-x) e^{1-x}}{1+x^2 e^{2-2x}} \end{aligned}$$

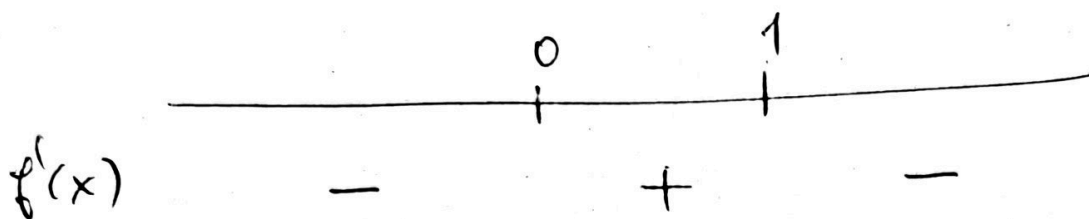
calcolo analogo
per $x < 0$.

- i limiti notevoli della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

$$\text{per } x < 0 \quad f'(x) = \frac{(x-1) e^{1-x}}{1+x^2 e^{2-2x}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{per } x \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = e \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -e \end{array} \right.$$

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :



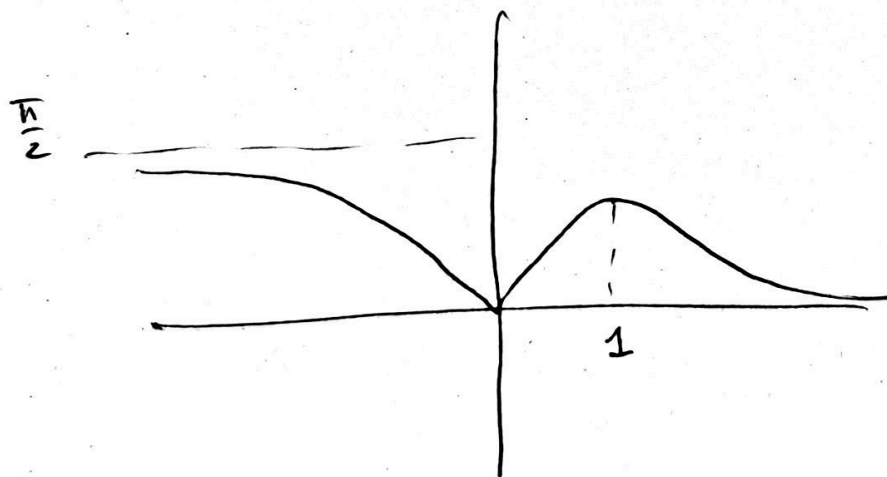
- i punti di estremo locale e la loro natura:

0 min locale, pto di non der.

1 max locale

0 anche min globale

- tracciare il grafico qualitativo di f :



- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.

$$f(D) =$$

$$f(D) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

(i) Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 5 in $x_0 = 0$ della funzione seguente:

$$f(x) = \cos^2(x) - \cos(x) + \frac{1}{2} \sinh^2(x) = \frac{11}{24} x^4 + o(x^5)$$

(ii) Determinare il termine principale della funzione (ovvero trovare $c, \gamma \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ tale che si abbia)

$$(\cos x + 1)x^4 + (1 - \cos(x))^3 = cx^\gamma + o(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0$$

$$c = 2 \quad \gamma = 4$$

(ii) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2(x) - \cos(x) + \frac{1}{2} \sinh^2(x)}{(\cos(x) + 1)x^4 + (1 - \cos(x))^3} = \frac{11}{48}$$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

1) Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z = 1 + i$ sia soluzione di

$$\lambda |z|^2 = z^3$$

$$\lambda = -1 + i$$

2) Determinare tutte le soluzioni della equazione seguente e disegnarle nel piano complesso

$$2|z|^2 = z^3$$

$$z = 0$$

$$z = -1 - i\sqrt{3}$$

$$z = 2$$

$$z = -1 + i\sqrt{3}$$