

Analisi Matematica 1, 18/06/24 - Canale A-L

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Dimostrare per induzione che il numero $n^3 - n + 6$ è divisibile per 3 per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. Sia $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Scrivere le definizioni seguenti **e le loro negazioni**
 - a. x_0 punto di accumulazione per A ,
 - b. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
3. Enunciare il teorema di Lagrange e dimostrarlo.
4. Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dire se la seguente affermazione è vera o falsa e giustificare

se $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Analisi Matematica 1, 18/06/24 - Canale A-L

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Calcolare l'insieme di tutte le primitive

$$\int \arctan \left(\frac{1}{x+1} \right) dx$$

ed in particolare la primitiva F che soddisfa $F(0) = 1$.

(ii) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+1) \arctan \left(\frac{1}{x+1} \right) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \arctan(|x|e^{1-x}).$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

○

○

○

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

(i) Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 5 in $x_0 = 0$ della funzione seguente:

$$f(x) = \cos^2(x) - \cos(x) + \frac{1}{2} \sinh^2(x) =$$

(ii) Determinare il termine principale della funzione (ovvero trovare $c, \gamma \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ tale che si abbia)

$$(\cos x + 1)x^4 + (1 - \cos(x))^3 = cx^\gamma + o(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0$$

$$c = \quad \quad \gamma = \quad .$$

(ii) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2(x) - \cos(x) + \frac{1}{2} \sinh^2(x)}{(\cos(x) + 1)x^4 + (1 - \cos(x))^3} =$$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

1) Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z = 1 + i$ sia soluzione di

$$\lambda|z|^2 = z^3$$

2) Determinare tutte le soluzioni della equazione seguente e disegnarle nel piano complesso

$$2|z|^2 = z^3$$