

Analisi Matematica 1, 06/02/24

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Dare la definizione di estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto.
2. Dire se le seguenti affermazioni su successioni reali sono vere o false e giustificare:
 - a. se (a_n) è limitata e (b_n) è di Cauchy allora $(a_n b_n)$ è convergente,
 - b. se (a_n) è limitata e (b_n) è di Cauchy allora $(a_n b_n)$ è limitata.
3. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.
4. Dati due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$, dimostrare che $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Analisi Matematica 1, 06/02/24

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(i) Calcolare l'insieme di tutte le primitive di $f(x) = (x - 1) \log(2 - x^2)$ ovvero

$$\int (x - 1) \log(2 - x^2) dx$$

(ii) Trovare quella primitiva $F(x)$ di $f(x)$ tale che $F(1) = 3$.

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = (1 - |x|)e^{\frac{1}{2x+2}}.$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

○

○

○

○

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 5 punti]

(i) Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 6 in $x_0 = 0$ della funzione seguente:

$$f(x) = \sqrt{9 - 6x^2} - \sqrt{9 + 6x^2} =$$

(ii) Determinare il termine principale della funzione (ovvero trovare $c, \gamma \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ tale che si abbia)

$$\sin(x^3) - x^3 + 1 - \cosh x = cx^\gamma + o(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0$$

$$c = \quad \gamma = \quad .$$

(iii) Calcolare in funzione di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^\alpha) - x^\alpha + 1 - \cosh x}{\sqrt{9 - 6x^2} - \sqrt{9 + 6x^2}} =$$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 5 punti]

1) Classificare il tipo di equazione differenziale e trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = (1 + u(t)^2) \cos(t) \\ u(0) = c \end{cases}$$

2) Determinare, se esistono, i valori di c per cui $\lim_{t \rightarrow \pi/4} u(t) = +\infty$.