

Analisi Matematica 1, 22/01/24

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. La successione $a_n = \frac{n \cos(n)}{n+1}$ ammette una sottosuccessione convergente?
2. Data $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dati $x_0, L \in \mathbb{R}$. Dare la definizione di
 - a. x_0 punto di accumulazione per A .
 - b. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.
3. Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile dire se la seguente affermazione è vera o falsa e giustificare
se $f(-1) = -1$ e $1 \leq f'(x) \leq 3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(1) \leq 5$.
4. Dimostrare che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $f(x) < 0$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f(x) dx < 0$.

Analisi Matematica 1, 22/01/24

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Calcolare l'insieme di tutte le primitive

$$\int t\sqrt{2-t} dt$$

(ii) Calcolare tutte le soluzioni della equazione differenziale della funzione

$$u'(t) + \frac{u(t)}{t} = 0$$

(ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + \frac{u(t)}{t} + \sqrt{2-t} = 0, \\ u(1) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{x - |x^2 - 2|}{x} \right).$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

○

○

○

○

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

(i) Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 6 in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = 1 - e^{2x^2} =$$

$$g(x) = \sin(\log(1 + x^2)) =$$

(ii) Calcolare in funzione di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\log(1 + x^2)) + (1 - e^{2x^2}) + 3x^4}{x^\alpha \cos(x)} =$$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

Consideriamo il numero complesso $z = e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

1) Esprimere z sia in forma algebrica $z = a + ib$ sia in forma trigonometrica $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

$$z = \quad , z =$$

2) Esprimere le radici cubiche di z in forma esponenziale $z = re^{i\theta}$.