



1. L'equazione omogenea associata è

$$y'' + 4y = 0$$

che ha eq. caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$. Perciò l'integrale generale è

$$y(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x).$$

Poiché λi è zero caratteristico cerchiamo una soluzione particolare di

$$y'' + 4y = \cos(2x)$$

nella forma

$$\bar{y}(x) = x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$$

$$\text{Calcoliamo: } \bar{y}'(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + 2x(-C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x))$$

$$\bar{y}''(x) = 4(-C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)) - 4\bar{y}(x)$$

$$\Rightarrow -4C_1 = 0, \quad 4C_2 = 1$$

L'integrale generale è perciò

$$y(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x) + \frac{1}{4} x \sin(2x), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Le condizioni iniziali si impongono per $x=0$:

$$a = 1$$

$$e: \quad y'(x) = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x) + \frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x)$$

$$2b = 2$$

$$\Rightarrow y(x) = \cos(2x) + \sin(2x) + \frac{1}{4} x \sin(2x)$$

è la soluzione cercata.

2. $f(x) = \sin\left(\frac{|x^2-1|}{1+x^2}\right)$

useremo il fatto che $0 \leq \frac{|x^2-1|}{1+x^2} \leq 1$ (*) come subito si verifica.

$D = \mathbb{R}$, f è peci.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{|x^2-1|}{1+x^2}\right) = \sin 1.$ $y = \sin 1$ asintoto orizzontale

$f(0) = \sin(1)$

non vi sono altri asintoti.

f è derivabile se $x^2-1 \neq 0$ cioè $x \neq \pm 1$.

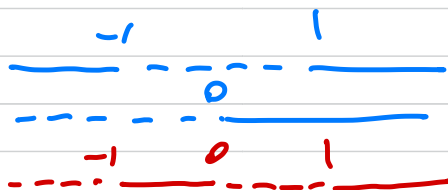
Se $x \neq \pm 1$

$f'(x) = \underbrace{\cos\left(\frac{|x^2-1|}{1+x^2}\right)}_{\geq 0 \text{ per (*)}} \cdot \left(\frac{\text{sgn}(x^2-1) \cdot 2x(1+x^2) - |x^2-1|2x}{(1+x^2)^2} \right) =$

$= \cos\left(\frac{|x^2-1|}{1+x^2}\right) \text{sgn}(x^2-1) 2x \frac{(1+x^2 - x^2 + 1)}{(1+x^2)^2}$

$\Rightarrow \text{sgn } f' = \text{sgn}(x^2-1) \cdot x$

sgn f'



0: max locale stretto

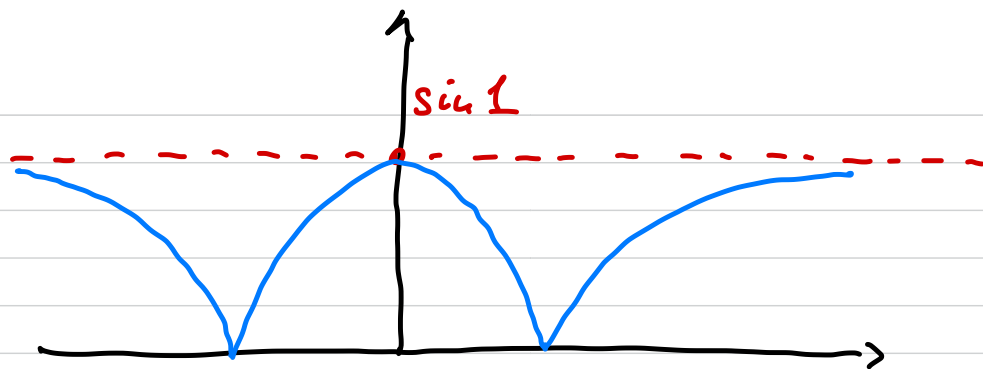
± 1 : min locale stretto

$f(\pm 1) = 0$

$f'(1+) = 1 = f'((-1)-)$; $f'(1-) = -1 = f'((-1)+)$

± 1 sono punti angolosi.

grafico di f :



$f(\mathbb{R}) = [0, 1]$, ± 1 pti di minimo e massimo
 0 pto di massimo assoluto.

3. $g(x) = \sin(\sin^3 x)$, $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$, $y \rightarrow 0$

$$g(x) = \sin^3 x - \frac{(\sin^3 x)^3}{6} + o(x^9) = \sin^3 x + o(x^8)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = x^3 - 3x^2 \frac{x^3}{6} + o(x^5) =$$

$$= x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5) \text{ se } x \rightarrow 0$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0$$

Allora

$$f(x) = \sin x - \sinh(x) + \frac{1}{3} \sin / \sin^3 x =$$

$$= -\frac{2x^3}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^5) =$$

$$= -\frac{x^5}{6} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0$$

Può:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^5/6 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{6}.$$

4. $\int x \arctan(x+2) dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x+2)$

↑
per parte

$$- \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x+2) - \frac{1}{2} \int \left[1 - \frac{4x+5}{1+(x+2)^2} \right] dx =$$

$1+(x+2)^2 = x^2 + 4x + 5$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x+2) - \frac{x}{2} + \int \left[\frac{2x+4}{1+(x+2)^2} - \frac{3/2}{1+(x+2)^2} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x+2) - \frac{x}{2} + \lg(x^2+4x+5) - \frac{3}{2} \arctan(x+2) + C$$

$$= F(x) + C$$

$$C \in \mathbb{R}.$$

Può

$$\int_0^1 x \arctan(x+2) dx = F(1) - F(0).$$