

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema B

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

- Ricordare il principio di induzione e dimostrare che $2^n \leq n!$ per ogni $n \geq 4$.
- Enunciare il criterio del rapporto per successioni e applicarlo per giustificare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua

- Definire l'integrale di Riemann $\int_a^b f(x)dx$
- Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Parte di esercizi.

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema B

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Calcolare l'insieme delle primitive seguente

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx.$$

(ii) Si trovi l'integrale generale della equazione differenziale omogenea

$$y' + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} y = 0,$$

(ii) Si risolva il problema di Cauchy per la equazione differenziale non omogenea

$$\begin{cases} y' + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} y = \frac{1}{(e^x + 1)^2}, \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = |x|\sqrt{1-x^3}.$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

◦

◦

◦

◦

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità o non facenti parte del dominio;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

- (i) Trovare lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ (Mac-Laurin) di ordine 5 delle funzioni

$$g(x) = \log(1 - \sin^2(x)),$$

$$f(x) = \cos(x^2) - \cosh(x^2)$$

Suggerimento facoltativo: Usare sviluppi noti

$$g(x) =$$

$$f(x) =$$

- (ii) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \log(1 - \sin^2(x))}{\cos(x^2) - \cosh(x^2)} =$$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

- (i) Determinare tutte le soluzioni complesse della equazione seguente

$$z^3 = (1 + i)^{12}$$

- (ii) Disegnare le soluzioni nel piano complesso