

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema B

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

- Per una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori reali, dare la definizione di successione convergente e di successione limitata.
- È vero che ogni successione convergente è limitata?
In caso affermativo, dimostrarlo, altrimenti fornire un controesempio
- Si dia la definizione di funzione continua per $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dove $A \subset \mathbb{R}$.
- Giustificare grazie alla definizione data al punto precedente che la funzione seguente non è continua in nessun punto

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Parte di esercizi.

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema B

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Si trovi l'integrale generale della equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' + 4y = \cos(2x),$$

determinando prima l'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

(ii) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos(2x), \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \sin \left(\frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1} \right).$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

○

○

○

○

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità o non facenti parte del dominio;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

- (i) Trovare lo sviluppo di Taylor in $x_o = 0$ (Mac-Laurin) di ordine 5 delle funzioni

$$g(x) = \sin(\sin^3(x)),$$

$$f(x) = \sin x - \sinh x + \frac{1}{3} \sin(\sin^3(x)).$$

Suggerimento facoltativo: Usare sviluppi noti

$$g(x) =$$

$$f(x) =$$

- (ii) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sinh x + \frac{1}{3} \sin(\sin^3(x))}{\tan(x^4)} =$$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

- (i) Determinare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = x \arctan(x + 2)$$

- (ii) Calcolare

$$\int_0^1 x \arctan(x + 2) dx$$