

Cognome e Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

**Tema A**

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

- Dare la definizione di funzione  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monotona crescente e strettamente crescente
- Dire se l'affermazione è vera o falsa e giustificare: (qui  $(a, b)$  indica l'intervallo aperto)

Data  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile e  $f$  strettamente crescente su  $(a, b)$ , allora  $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in (a, b)$ .

- Enunciare il teorema degli zeri e il teorema di Weierstrass
- Usando eventualmente i teoremi enunciati al punto precedente, dimostrare l'affermazione seguente :

Se  $I \subset \mathbb{R}$  è un intervallo ed  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, allora  $f(I)$  è un intervallo.



Parte di esercizi.

Cognome e Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

**Tema A**

**Esercizio 1** [con svolgimento, 8 punti]

(i) Calcolare l'integrale  $\int_0^{\pi/4} \tan(x) dx$

(ii) Si trovi l'integrale generale della equazione differenziale definita per  $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$

$$y' = \tan(x)y + 7$$

risolvendo prima l'equazione omogenea associata

(iii) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \tan(x)y + 7, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

(Bonus) Determinare tra le soluzioni di (ii), se esistono, quelle tali che  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} y(x) = 0$ .



## Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = |x|e^{\arctan(-3/x)}.$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*)  $D$  di  $f$ .

$D =$

- i *limiti notevoli* di  $f$ :

◦

◦

◦

◦

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata,  $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità o non facenti parte del dominio;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di  $f$ :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di  $f$ :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.  
 $f(D) =$



**Esercizio 3** [senza svolgimento, 4 punti]

- (i) Trovare lo sviluppo di Taylor in  $x_0 = 0$  (Mac-Laurin) di ordine 4 della funzione

$$f(x) = e^{\sin(3x)} - e^{3x}$$

*Suggerimento facoltativo: Usare sviluppi noti*

$$f(x) =$$

- (ii) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^6)}{e^{\sin(3x)} - e^{3x}}.$$

**Esercizio 4** [senza svolgimento, 4 punti]

- (i) Determinare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = 3^x \arctan(3^x)$$

- (ii) Calcolare

$$\int_0^1 3^x \arctan(3^x) dx$$