

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

1.a Dare la definizione di $\sup A$, l'estremo superiore di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$

1.b Dire se è vera o falsa la proposizione seguente :

Siano A, B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Se $A \subseteq B$ allora $\sup A \leq \sup B$.

e giustificare la propria affermazione.

2.a Enunciare il Teorema di Lagrange

2.b Applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \arctan(x)$ per dimostrare la seguente affermazione:
per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) \leq \frac{1}{1+n^2}$$

Parte di esercizi.

Cognome e Nome Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Determinare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$$

(ii) Si trovi l'integrale generale della equazione differenziale

$$y' = y^2 + 4y + 5$$

e poi si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + 4y + 5, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = e^{2x} \left| \frac{x}{x-2} \right|.$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

○

○

○

○

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

(i) Trovare lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ (Mac-Laurin) di ordine 4 della funzione

$$f(x) = e^{-2x} - (1 + \sin(2x))^{-1} + 2 \log(1 + x^2)$$

Suggerimento facoltativo: Usare sviluppi noti e ricordare che per $x \rightarrow 0$ si ha lo sviluppo

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + o(x^6)$$

$$f(x) =$$

(ii) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - (1 + \sin(2x))^{-1} + 2 \log(1 + x^2)}{\tan(x)^3}.$$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

Determinare tutte le soluzioni complesse della equazione seguente

$$\frac{z^3}{z^3 + 2} = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$$

e poi disegnarle nel piano complesso.