

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

1. Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definire cosa significa $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$.
Per $g(x) = \sin x$, dare un esempio esplicito di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f = o(g)$ per $x \rightarrow \pi$.

2. Date $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$ per $x \rightarrow x_0$, dimostrare che se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = L$ allora vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = L$$

3. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
4. Dire se il seguente argomento è corretto o sbagliato e giustificare: ponendo $y = x^2$ si ha $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$ dunque

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx = \int_1^1 \frac{e^{-y}}{2\sqrt{y}} dy = 0$$

in quanto nel secondo integrale gli estremi dell'intervallo di integrazione coincidono.

Parte di esercizi.

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Determinare tutte le primitive

$$\int \frac{x-1}{(x+2)^2} dx$$

(ii) Poi calcolare

$$\int_2^3 \frac{x-1}{(x+2)^2} \log(x+2) dx$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = (x - 1)^3 e^{\frac{1}{x-1}}$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

◦

◦

◦

◦

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

- (i) Determinare il polinomio di Taylor di grado 4 in $x_o = 0$ di

$$f(x) = \log(\cos x).$$

- (ii) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x) - \log(e^x - x)}{\sqrt{1 + x^3}}$$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

- (i) Determinare l'integrale generale della equazione differenziale

$$u' = e^x e^{-u} \tag{1}$$

- (ii) Risolvere il relativo problema di Cauchy con condizione iniziale $u(0) = 0$.

- (iii) L'equazione ammette soluzioni limitate?