

Es 1

①

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$u = e^x$$

$$dx = \frac{du}{u}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1}{1+u} \frac{du}{u} &= \int_1^e \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} du \\ &= \left[\log|u| - \log|1+u| \right]_1^e \\ &= 1 + \log 2 - \log(1+e) \end{aligned}$$

②

$$u' = \frac{u}{1+e^x} + e^{-x}$$

omogenea $u' = \frac{u}{1+e^x}$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$

soluzioni $u(t) = c e$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = x - \log(1+e^x) = \log\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

$$\Rightarrow u(x) = c \frac{e^x}{1+e^x}$$

ricavo soluzione particolare

$$u_p(x) = c(x) \frac{e^x}{1+e^x}$$

ottengo

$$\cancel{u_p(x)} \quad c'(x) \frac{e^x}{1+e^x} = e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \text{da cui} \quad c(x) &= \int (1+e^x) e^{-2x} dx \\ &= \int e^{-2x} + e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_p(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \left(-\frac{e^{-2x}}{2} - e^{-x} \right)$$

soluzione generale

$$u(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \left(c - \frac{e^{-2x}}{2} - e^{-x} \right)$$

③ affinché $u(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$
serve $c=0$.

ES. 2

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x-1|}{x^2+1}\right)$$

dominio $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arctan(0) = 0$$

e simile per $x \rightarrow -\infty$

Asintoto orizz. $y=0$ per $x \rightarrow \pm\infty$

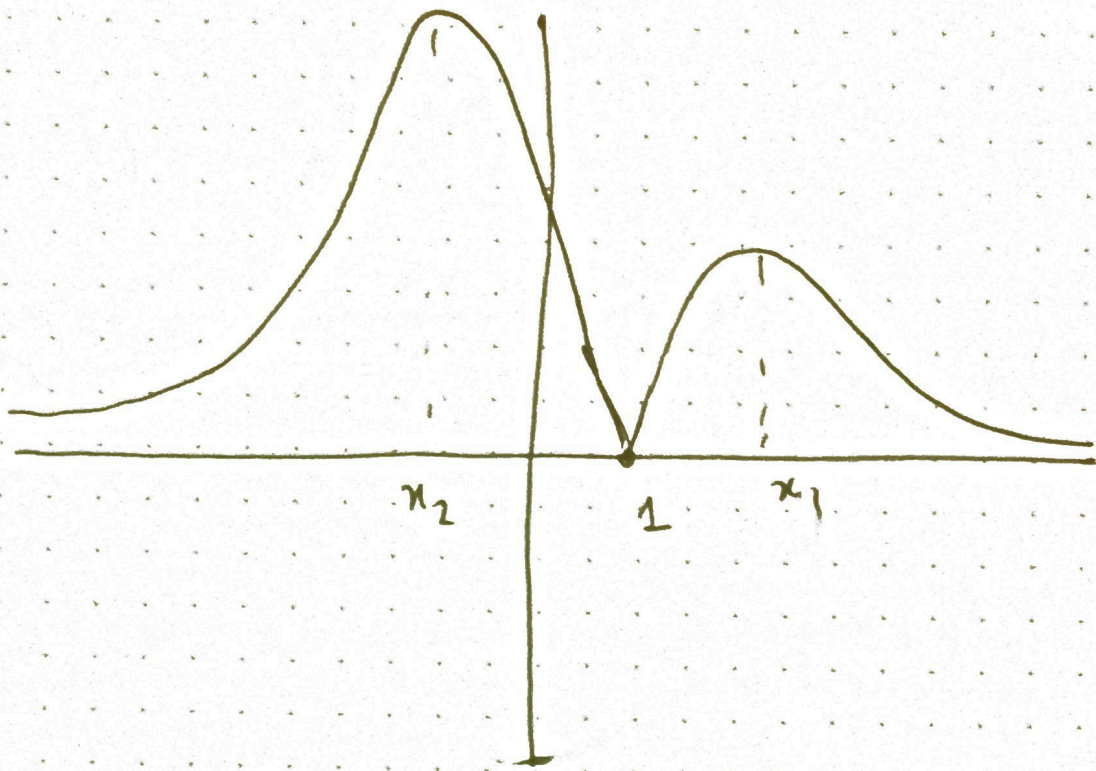
Per $x > 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2}} \cdot \frac{-(x-1)2x + (x^2+1)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2 + (x-1)^2} \end{aligned}$$

Per $x < 1$ la derivata è la stessa
ma col segno meno.

Lo studio del segno di $f'(x)$

si riduce allo studio del segno
del numeratore.



Nota che

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$$

punto angoloso.

Trovo due massimi in punti

$$x_1 : \text{soluzione di } -x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x > 1$$

$$x_2 : \text{soluzione di } x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x < 1$$

ES 3

$$f(x) = e^{3 \sin x}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$3 \sin x = 3x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

$$\begin{aligned} e^{3 \sin x} &= 1 + \left(3x - \frac{x^3}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(3x - \frac{x^3}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(3x - \frac{x^3}{2}\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + 3x + \frac{9}{2} x^2 + 4x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

per il limite dato che

$$3 \log(1+x) = 3x - \frac{3}{2} x^2 + x^3 + o(x^3)$$

si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{3 \sin x} - 3 \log(1+x) \right)^{\frac{2}{x^2}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 6x^2 + o(x^2) \right)^{\frac{2}{x^2}} = e^{12} \end{aligned}$$

ES 4

$$2z^4 + (3 - \sqrt{3}i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i) = 0$$

pongo $w = z^2$

$$2w^2 + (3 - \sqrt{3}i)w + (1 - \sqrt{3}i) = 0$$

dalla formula ricavo

$$w = \frac{-(3 - \sqrt{3}i) \pm \sqrt{(3 - \sqrt{3}i)^2 - 8(1 - \sqrt{3}i)}}{4}$$

calcolando ottengo

$$w_1 = -1$$

$$w_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$$

risolvendo dunque

$$z^2 = -1$$

$$z^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$$

ottengo le 4 soluzioni

$$\left\{ +i, -i, -\frac{1}{2}i(-i + \sqrt{3}), \frac{1}{2}i(-i + \sqrt{3}) \right\}.$$