

Cognome e Nome Matr.
 Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: 40 minuti.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

1. Date due funzioni $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando
 se f e g sono decrescenti, allora la funzione composta $f \circ g$ è crescente

2. Enunciare il Teorema dei valori intermedi e usarlo per stabilire se l'equazione

$$3x - 1 = \arctan x$$

ammette una soluzione reale nell'intervallo $[0, 1]$.

3. Data una successione reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dare la definizione di successione limitata, poi di successione convergente.
 4. Stabilire se le affermazioni seguenti sono vere o false e giustificare:
 a) Esistono successioni limitate non convergenti
 b) Esistono successioni convergenti non limitate

① Essendo f, g decrescenti per definizione

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \quad y_1 \geq y_2 \Rightarrow g(y_1) \leq g(y_2)$$

scegliendo $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ si ha

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$$

cioè $g \circ f$ crescente.

② Per enunciato vedere lezioni. Considero

$$f(x) = 3x - 1 - \arctan x \quad f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

f è continua e soddisfa

$$f(0) = -1 \quad f(1) = 3 - 1 - \arctan 1 = 2 - \frac{\pi}{4} > 0$$

24
dunque $\exists c \in]0,1[: f(c) = 0$

ovvero c è soluzione della equazione

③ vedere lezioni

④ A) vero. la successione $a_n = (-1)^n$
è limitata poiché $|a_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
ma non convergente in quanto le
due sottosuccessioni $a_{2n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $a_{2n+1} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
convergono a limiti diversi

B) falso. le successioni convergenti
sono limitate. vedere lezioni.
per la dimostrazione.

Parte di esercizi.

Cognome e Nome Matr.
 Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

- (i) Determinare l'unica primitiva F , definita sull'intervallo $]0, +\infty[$, della funzione

$$f(x) = x^2 \log(\sqrt{x})$$

che soddisfa $F(1) = 0$.

- (ii) Si trovi l'integrale generale della equazione differenziale

$$y'(x) = (1 + y^2(x))x^2 \log \sqrt{x}$$

dicendo di che tipo di equazione si tratta.

- (iii) Si risolva il problema di Cauchy (in forma implicita e/o esplicita)

$$\begin{cases} y'(x) = (1 + y^2(x))x^2 \log \sqrt{x}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

(i) notare $\log(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log x$

$$\begin{aligned} \int x^2 \log \sqrt{x} \, dx &= \frac{1}{2} \int x^2 \log x \, dx \\ &= \frac{1}{6} x^3 \log x - \frac{1}{6} \int x^3 \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{6} x^3 \log x - \frac{1}{18} x^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} x^3 \log x - \frac{1}{18} x^3 + C$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{18}$$

② equazione a variabili separabili
che si conduce a

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int x^2 \log \sqrt{x} dx$$

$$\arctan y = \frac{1}{6} x^3 \log x - \frac{1}{18} x^3 + C$$

se $y(1) = 0$ allora $C = \frac{1}{18}$ come sopra

$$y = \tan \left[\frac{1}{6} x^3 \log x - \frac{1}{18} x^3 + \frac{1}{18} \right]$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = |\log(x^2 + 2x - 8)|$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato con i calcoli necessari a una minima giustificazione rispettando gli spazi):

- il dominio (o dominio naturale) D di f .

$$D = \text{dove essere } x^2 + 2x - 8 > 0 \quad \text{ovvero } x < -4 \text{ o } x > 2$$

- i limiti notevoli di f :

$$D =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$$

- tutti i limiti ai bordi del dominio
- sono uguali a $+\infty$ in quanto
- $\lim_{y \rightarrow 0^+} |\log y| = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} |\log y| = +\infty$

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

non ci sono asintoti obliqui
in quanto $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y} = 0$

asintoti verticali a $x = -4$
 $x = 2$

per calcoli precedenti

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

notare che

$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x), & \text{se } g(x) > 0 \\ -g(x), & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\text{qui } g(x) = \log(x^2 + 2x - 8)$$

- i limiti notevoli della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

$$\text{allora } g(x) > 0 \Leftrightarrow \log(x^2 + 2x - 8) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 > 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 9 > 0$$

$$\begin{aligned} \text{soluzioni di } x^2 + 2x - 9 = 0 &\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 36}}{2} \\ &\Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{10} \end{aligned}$$

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :

Fatti i dovuti calcoli i punti di non derivabilità sono

$$x = -1 - \sqrt{10}, \quad x = -1 + \sqrt{10}$$

- i punti di estremo locale e la loro natura:

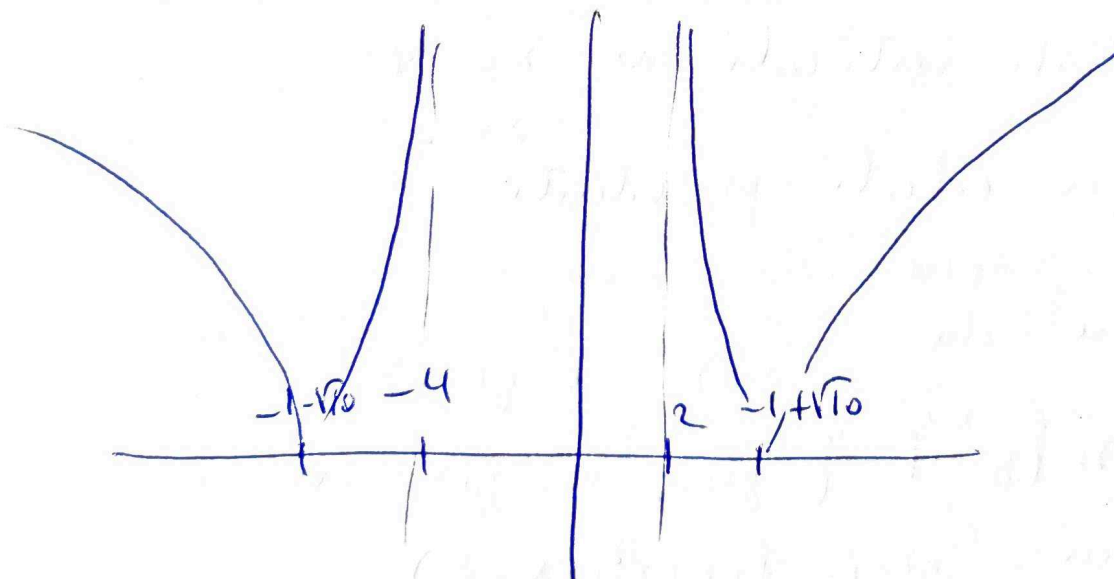
→ notare che dove $x^2 + 2x - 8 > 0$ si ha

$$f(x) = \log(x^2 + 2x - 8) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 8}$$

mentre per $0 < x^2 + 2x - 8 < 1$ si ha

$$f(x) = -\log(x^2 + 2x - 8) \quad f'(x) = -\frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 8}$$

- tracciare il grafico qualitativo di f :



- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.

$$f(D) =$$

$$f(D) = [0, +\infty[$$

0 minimo globale.

Esercizio 3 [senza svolgimento, 5 punti]

(i) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log(x) = 0 \quad \text{vedi limiti}$$

(ii) Scrivere lo sviluppo con il polinomio di Taylor in $x_0 = 0$ di grado 6

$$f(x) = \log(1+x^2) - \sin(x^2) = -\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + o(x^6)$$

(iii) Discutere in funzione del parametro $\alpha > 0$ il valore del limite

$$L(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) - \sin(x^2) + x^5 \log(x)}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

$L(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha < 2 \\ -\frac{1}{2} & \alpha = 2 \\ -\infty & \alpha > 2 \end{cases}$

notare che $1 - \cos^2 x = x^2 + o(x^2)$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 3 punti]

a) Determinare il valore di $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui la equazione

$$z^3 + iz^2 + \lambda z - 1 = 0 \quad (1)$$

ammetta come soluzione $z = -i$.

$$\lambda = i$$

b) Per il valore di λ determinato al punto a), trovare tutte le soluzioni della equazione (1) e disegnarle nel piano complesso

notare che

$$z^3 + iz^2 + iz - 1 = (z+i)(z^2+i)$$

e da qui basta risolvere

$$z^2 + i = 0.$$