

ANALISI 1. APPUNTO 07/02/23

TEMA A (studio di funzione anche per)
tema B

ES 1 1. $\int_0^1 \arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) du$

$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) du$$

$$x = \frac{u-3}{2}$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$du = 2 dx.$$

||

$$2 \int_{-3/2}^{-1} \arctan(x) dx$$

per parti

$$\begin{aligned} \text{ma } \int \arctan(x) dx &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int 2x \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) dx. \end{aligned}$$

$$= 2 \left[x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_{x=-3/2}^{x=-1}$$

$$= 2 \left[-\arctan(-1) - \frac{1}{2} \log(2) + \frac{3}{2} \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{9}{4}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 3 \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{13}{8}\right).$$

2. Una funzione $u(t) \equiv c$ è soluzione
se e solo se

$$0 = \frac{c^2 - 6c + 13}{9t^2 + 1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

cioè $c^2 - 6c + 13 = 0 \Rightarrow$ per nessun $c \in \mathbb{R}$

$$(c - 3)^2 + 4 = 0$$

non ci sono soluzioni
costanti

3

$$u' = \frac{u^2 - 6u + 13}{9t^2 - 1}$$

variabili separabili

$$\int \frac{du}{u^2 - 6u + 13} = \int \frac{dt}{9t^2 - 1}$$

li
calcolo separatamente

$$\int \frac{du}{(u-3)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u-3}{2}\right)$$

$$\int \frac{dt}{9t^2 - 1} = \int \frac{dt}{(3t+1)(3t-1)} = \frac{1}{6} [\log |3t-1| - \log |3t+1|]$$

da cui

$$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) = \frac{1}{6} (\log |3t-1| - \log |3t+1|) + c$$

Impongo $u(0) = 1$

$$\frac{1}{2} \arctan(-1) = \frac{1}{6} \underbrace{(\log|-1| - \log|1|)}_{=0} + c$$

$$\Rightarrow c = -\frac{\pi}{8}.$$

da cui

$$\arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) = \frac{2}{6} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{u-3}{2} = \tan\left(\frac{1}{3} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$u = 3 + 2 \tan\left(\frac{1}{3} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{8}\right).$$

nota: il log per essere definito

$$\frac{1-3t}{3t+1} > 0 \Rightarrow t \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[.$$

Poi devo avere

$$\frac{1}{3} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{8} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

perché sia definita la tangente.

$$f(x) = \sin\left(\frac{|x-1|}{x^2+2}\right)$$

dominio : $D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{x^2+2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{|x-1|}{x^2+2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{x^2+2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{|x-1|}{x^2+2}\right) = 0$$

$y = 0$ asintoto orizzontale a $+\infty$ e $-\infty$.

Per $x > 1$ si ha

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{x^2+2}\right)'$$

$$= \cos\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right) \cdot \frac{-(x^2+2) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right)}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 1^+ \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{-3x^2+2x-2}{(x^2+2)^2}}_{\substack{\downarrow \\ -\frac{3}{9}}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{9}$$

Similmente, per $x < 1$

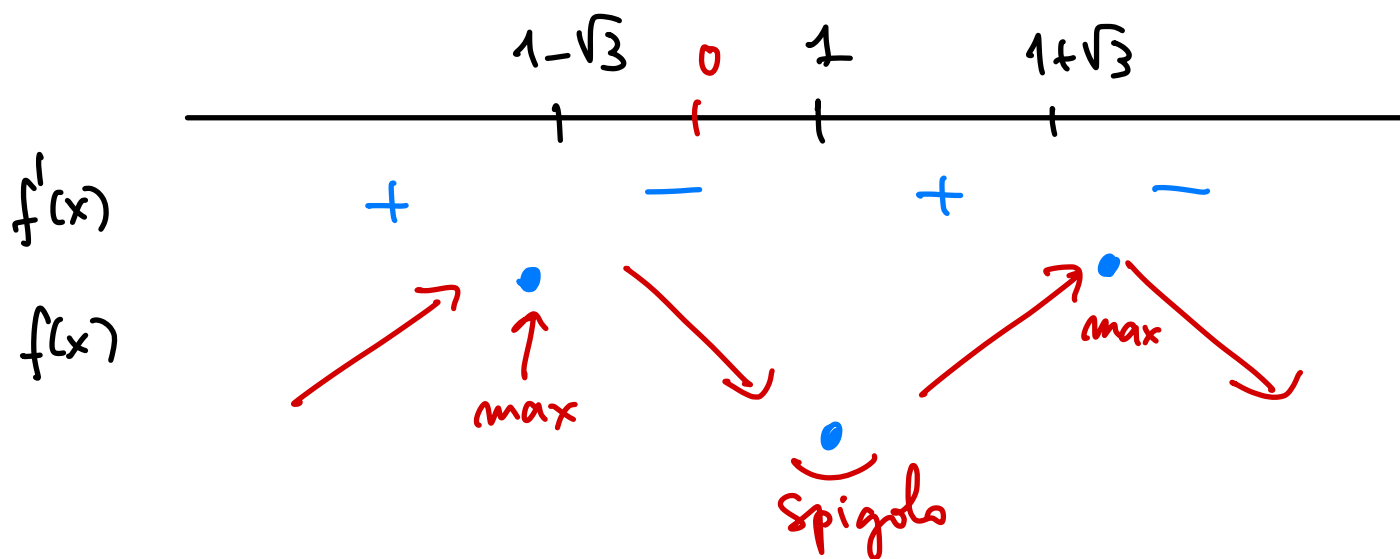
$$f'(x) = \infty \left(\frac{1-x}{x^2+1} \right) \cdot \frac{3x^2-2x+2}{(x^2+2)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

Nota che $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$

dunque f non è derivabile in $x=1$

Il segno di f' è dato dal segno del polinomio di 2° grado al numeratore in quanto

$$\frac{|x-1|}{x^2+2} \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{dunque} \quad \infty \left(\frac{|x-1|}{x^2+2} \right) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



SI ci sono punti angolosi!

grafico qualitativo.

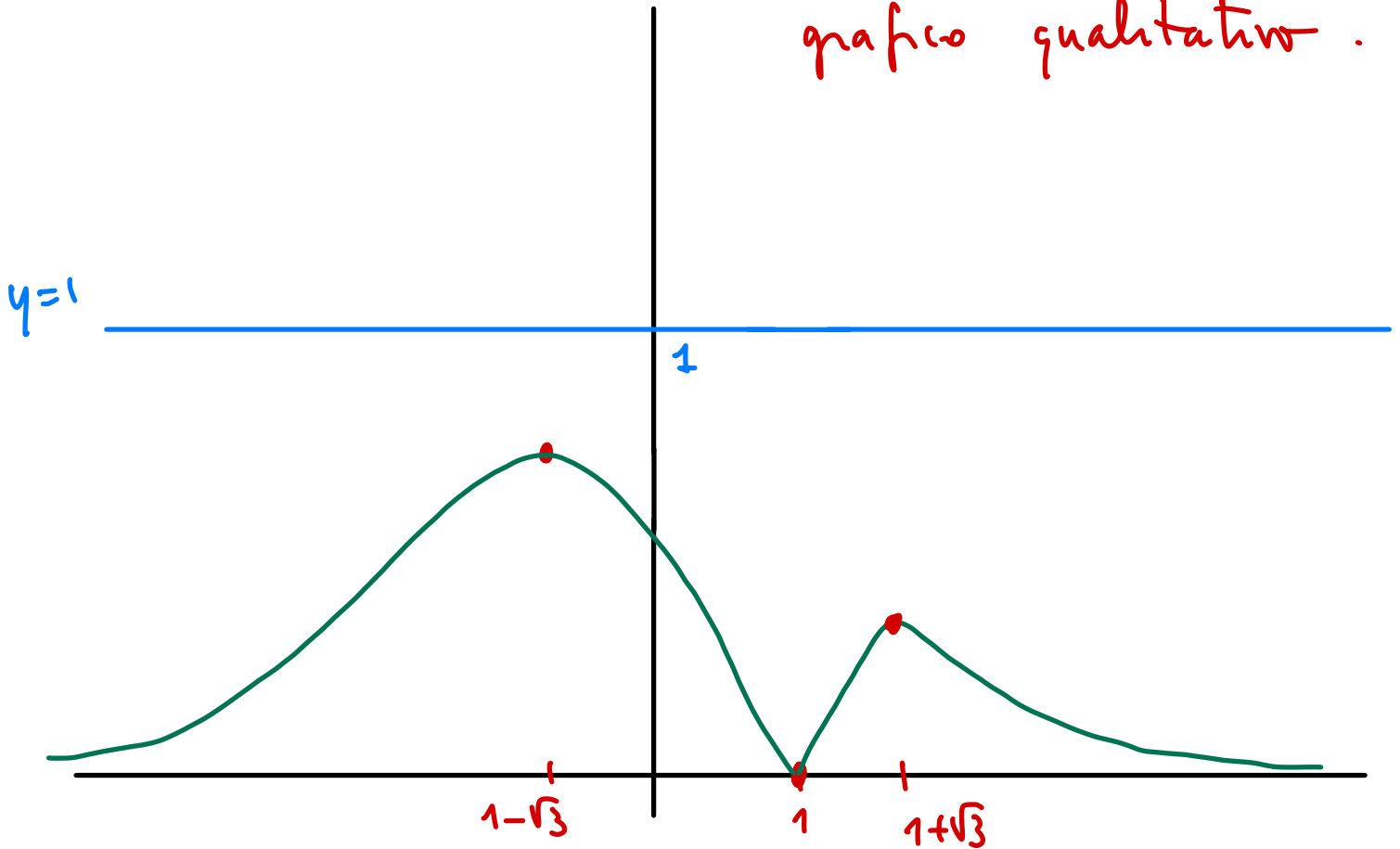


Immagine di f : $f(\mathbb{R}) = [0, f(1-\sqrt{3})]$.

ES 2

$$f(x) = \cos\left(\frac{|x-1|}{x^2+2}\right)$$

dominio : $D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{x^2+2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{|x-1|}{x^2+2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{x^2+2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{|x-1|}{x^2+2}\right) = 1$$

$y=1$ asintoto orizzontale a $+\infty$ e $-\infty$.

Per $x > 1$ si ha

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right) \cdot D\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right) \cdot \frac{-(x^2+2) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= -\sin\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right) \cdot \frac{-3x^2+2x-2}{(x^2+2)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$$

Similmente, per $x < 1$

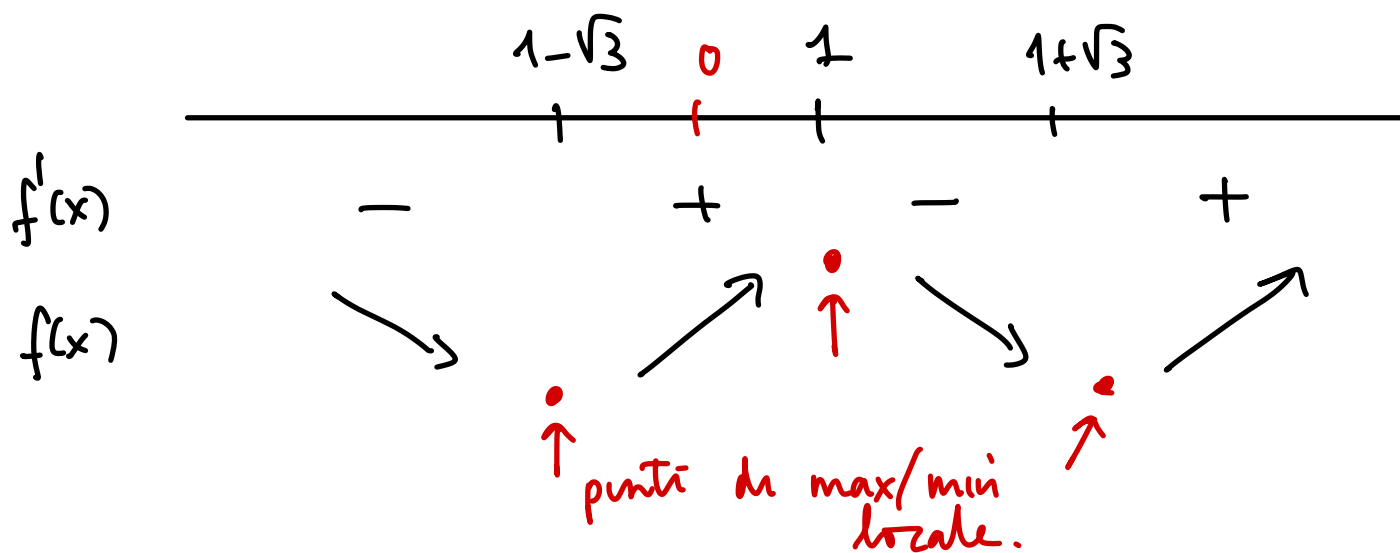
$$f'(x) = -\sin\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right) \cdot \frac{3x^2-2x+2}{(x^2+2)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$$

Nota che $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$

dunque f è derivabile anche in $x=1$

Il segno di f' è dato dal segno del polinomio di 2° grado al numeratore in quanto

$$\frac{|x-1|}{x^2+2} \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{dunque} \quad \sin\left(\frac{|x-1|}{x^2+2}\right) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



non ci sono punti angolosi!

grafico qualitativo.

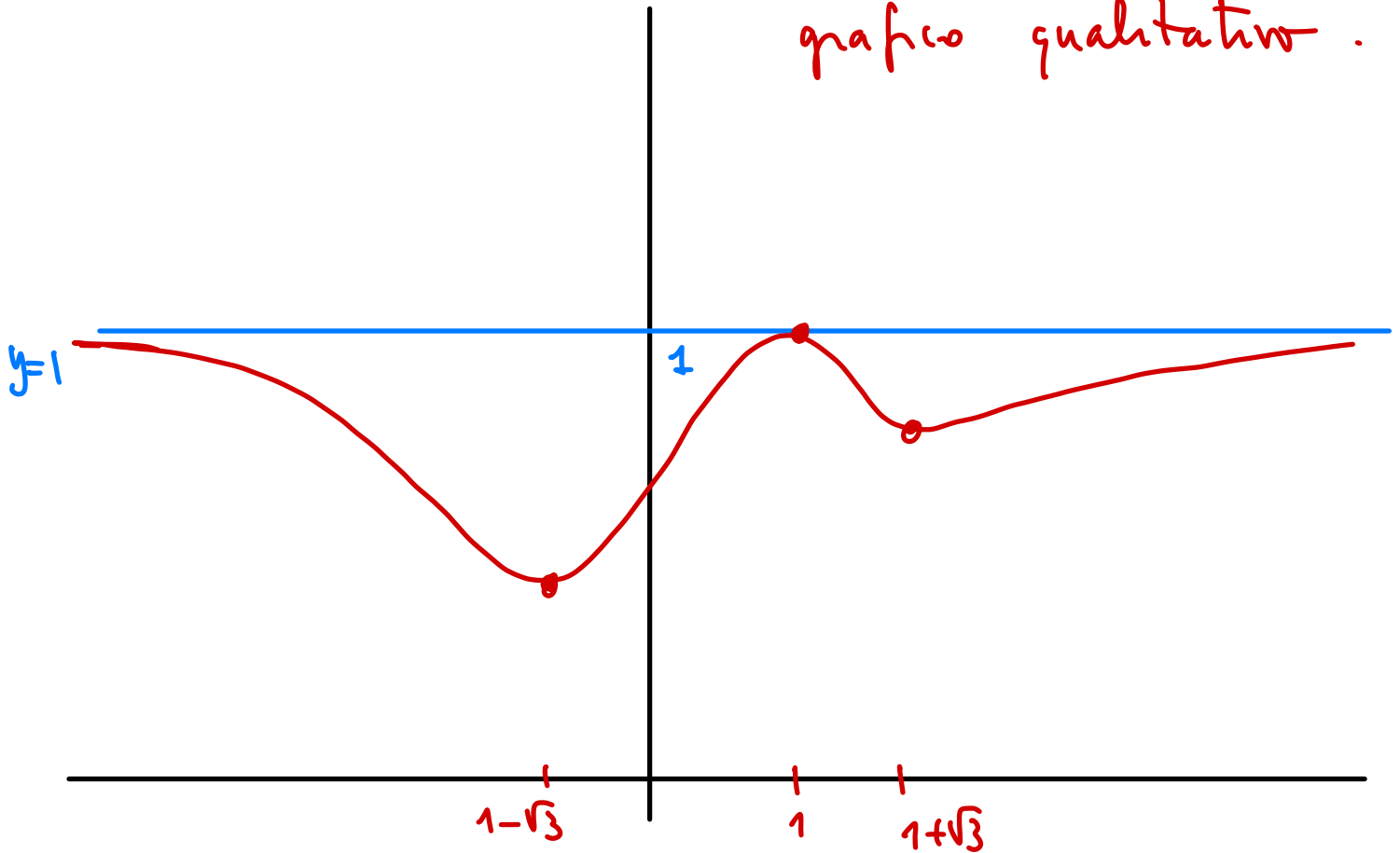


Immagine di f : $f(\mathbb{R}) = [f(1-\sqrt{3}), 1]$.

ES 3

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^4} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y}}{y^{-4}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^4}{e^y} = 0$$

confronto di
infiniti
o de l'Hopital.

Donque $e^{-1/x} = o(x^4)$ per $x \rightarrow 0^+$.

Sviluppo

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t)$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\cos(\sqrt{1+x^2}-1) = \cos\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} \right)^2 + o(x^6) \\ &= 1 - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} + o(x^6). \end{aligned}$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

In particolare $\cos(\sqrt{1+x^2}-1) = 1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.

Allora

$$\begin{aligned} & \exp(x^\alpha) - \cos(\sqrt{1+x^2} - 1) \\ &= \cancel{1} + x^\alpha + o(x^\alpha) - \cancel{1} - \frac{x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

mentre il denominatore

$$x - \sinh(x) + e^{-1/x} = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

In conclusione

Se $\alpha < 3$

$$L(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -\infty$$

Se $\alpha = 3$

$$L(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -6$$

Se $\alpha > 3$ il numeratore ha grado > 3 .

$$L(\alpha) = 0$$

ES 4

Notiamo

$$\left| \frac{1}{\alpha z} - \frac{1}{\alpha \bar{z}} \right| \overset{\alpha > 0}{=} \frac{1}{\alpha} \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right|$$
$$= \frac{1}{\alpha} \frac{|\bar{z} - z|}{|z|^2}$$

Donque $\left| \frac{1}{\alpha z} - \frac{1}{\alpha \bar{z}} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|\bar{z} - z|}{|z|^2} = \alpha.$

ora se $z = x + iy$

$$|\bar{z} - z| = 2|x|$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

Da cui $2|x| = \alpha(x^2 + y^2).$

Se $z = 2 + 2i$ è sol. $\Rightarrow 4 = \alpha(4 + 4)$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

L'insieme per $\alpha = \frac{1}{2}$ diventa

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4|x|\}$$
 unione di due circonferenze

$$x^2 + y^2 = 4x \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = -4x.$$

