

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

1. Dato $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto, dare la definizione di estremo superiore di A .
2. Dare la definizione di successione di Cauchy. La successione $a_n = \frac{n!}{3^n}$ è di Cauchy?
3. Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange.
4. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale. Spiegare se il seguente calcolo è corretto o sbagliato e giustificare la risposta

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-1}^{x=1} = -1 - (+1) = -2$$

Parte di esercizi.

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) du$$

(ii) Trovare eventuali soluzioni costanti della equazione differenziale

$$u' = \frac{u^2 - 6u + 13}{9t^2 - 1}, \quad (1)$$

(iii) Determinare la soluzione della equazione differenziale (1) che soddisfa la condizione iniziale $u(0) = 1$. Qual è l'intervallo più grande su cui è definita?

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{|x-1|}{x^2+2}\right).$$

Si potrà utilizzare senza giustificare il fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $\frac{|x-1|}{x^2+2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

○

○

○

○

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 5 punti]

(i) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^4} =$$

(ii) Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 6 in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \cos(\sqrt{1+x^2} - 1)$

$$f(x) =$$

(iii) Discutere in funzione del parametro $\alpha > 0$ il valore del limite (notazione $\exp(x) = e^x$)

$$L(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(x^\alpha) - \cos(\sqrt{1+x^2} - 1)}{x - \sinh(x) + e^{-1/x}}$$

$$L(\alpha) =$$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 3 punti]

1) Determinare il valore di $\alpha > 0$ per cui la equazione

$$\left| \frac{1}{\alpha z} - \frac{1}{\alpha \bar{z}} \right| = 1 \tag{2}$$

ammette come soluzione $z = 2 + 2i$.

$$\alpha =$$

2) Per il valore di α determinato al punto precedente, disegnare nel piano complesso tutte le soluzioni della equazione (2)