

Tema A

① (i) Calcolare $\int \frac{x}{x^2+2x+2} dx$

Si ha $\int \frac{x}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$

essendo $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)$$

(ii) La soluzione è

$$u(x) = c e^{A(x)} \quad A(x) = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx$$

cioè

$$u(x) = c e^{\log(x^2+2x+2)} = c(x^2+2x+2)$$

Si noti $x^2+2x+2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) Cerco una soluz. particolare

$$u_p(x) = c(x) (x^2 + 2x + 2)$$

Allora si trova

$$c'(x) (x^2 + 2x + 2) = x$$

$$\Rightarrow c(x) = \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

dal punto 1 si ha

$$u_p(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x+1)$$

Sol. generale

$$u(x) = (x^2 + 2x + 2) \left[C + \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x+1) \right]$$

$$u(0) = 2 \left[C + \frac{1}{2} \log(2) - \arctan(1) \right]$$

Se impongo $u(0) = \log 2$

$$\text{allora } C = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

② $f(x) = \log(9 - |x^3 + 8|)$

dominio : $9 - |x^3 + 8| > 0$

ovè $|x^3 + 8| < 9$
 $-9 < x^3 + 8 < 9$
 $-17 < x^3 < 1$

da cui $D =]-\sqrt[3]{17}, 1[$

Si noti che $17 > 8 = 2^3 \Rightarrow -2 \in D$.
 e $f(-2) = \log(9)$.

Chiaramente $\lim_{x \rightarrow -\sqrt[3]{17}^+} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ } *asintoti verticali*

Per $x \in]-2, 1[$ $f(x) = \log(1 - x^3)$

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{1-x^3} = \frac{3x^2}{x^3-1} \leq 0$$

noto che in $x=0$ $f'(0)=0$ *← PUNTO*

Per $x \in]-\sqrt[3]{17}, -2[$ $f(x) = \log(17+x^3)$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{17+x^3} > 0$$

Inoltre $x = -2$ punto non derivabilit  perche'

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2}{17+x^3} = \frac{12}{17-8} = \frac{4}{3}$$

+

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{12}{-9} = -\frac{4}{3}$$

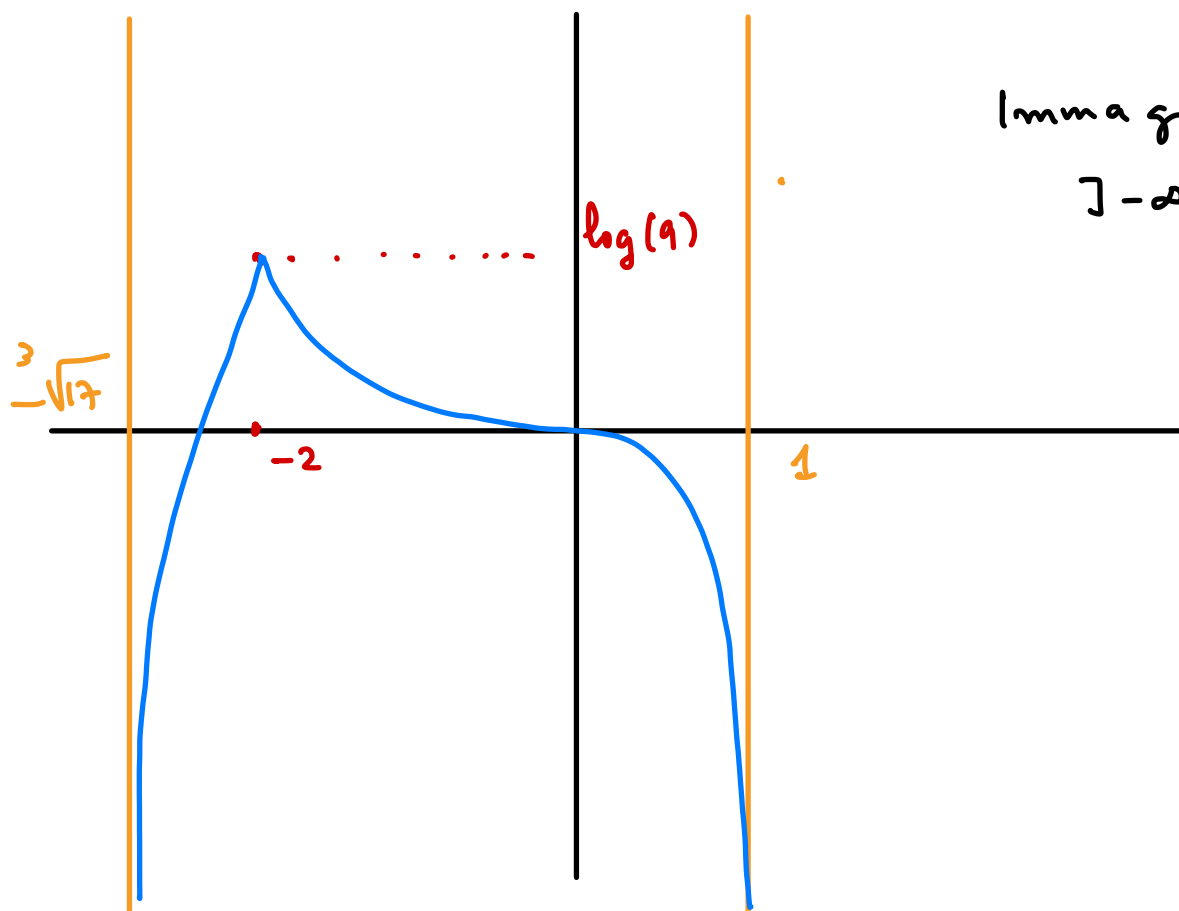


Immagine di f
 $] -\infty, \log 9]$.

3

$$(1+x^2)^7 = 1 + 7x^2 + \frac{7 \cdot 6}{2} x^4 + o(x^4)$$

$$= \underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{7x^2} + 21x^4 + o(x^4)$$

$$7x \sin x = 7x \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)$$

$$= \underset{\sim}{7x^2} - \frac{7}{6} x^4 + o(x^5).$$

$$\cos(x^2) = \underset{\sim}{1} - \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Dunque

$$7x \sin(x) + \cos(x^2) - (1+x^2)^7 = A(x)$$

$$A(x) = \left(-\frac{7}{6} - \frac{1}{2} - 21 \right) x^4 + o(x^4)$$

$$= \frac{-7-3-126}{6} x^4 + o(x^4) = -\frac{68}{3} x^4 + o(x^4).$$

Imo ltre

$$x^4 + \cos(x^2) = x^4 + 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$= 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$B(x) = \log(x^4 + \cos(x^2)) = \log\left(1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)$$

$$= \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

da cui il limite vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{68}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + o(x^4)} = -\frac{136}{3}$$

④ Con una integrazione per parti

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = +\frac{1}{2} e^{-x} (-\cos x + \sin x) + C$$

Per avere $F(\pi) = 1$ allora

$$+ \frac{1}{2} e^{-\pi} \left(\underbrace{-\cos(\pi)}_{+1} + \underbrace{\sin(\pi)}_0 \right) + C = 1$$

$$\Rightarrow C = 1 - \frac{e^{-\pi}}{2}.$$

Inoltre (attenzione la primitiva non è la stessa)

$$a_n = \int_0^n e^{-x} \cos(x) \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n} (-\cos(n) + \sin(n))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

↓ $n \rightarrow +\infty$
0

TEORIA

① Definizione di f derivabile

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

↑
esiste finito.

Se f derivabile allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

posso
applicare
teo. limiti

$$\rightarrow = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

dunque f è continua perché

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

② Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
 essa ammette massimo e minimo
 assoluto in $[a, b]$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 :$
 $\forall x \in D, x > M \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$ per teorema dei carabinieri

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x > 1.$$

$\downarrow$
 $x \rightarrow +\infty$
 0

$\downarrow$
 $x \rightarrow +\infty$
 0

④ Falso. Si poteva costruire un controesempio
 ispirandosi al punto 3. Ad es.

$$f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0} \quad \text{ma}$$

$$f'(x) = -2 \sin(x^2) - \frac{\cos(x^2)}{x^2} \quad \text{non ha limite! per } x \rightarrow +\infty$$