

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti.

- 1 Dare la definizione di $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, allora f è continua.
- 2 Enunciare il teorema di Weierstrass e illustrarlo su un esempio.
- 3 Dare la definizione di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, con $L \in \mathbb{R}$, e spiegare perchè $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$.
- 4 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, dire se è vera o falsa la implicazione seguente e giustificare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, \quad \text{con } L \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

Parte di esercizi.

Cognome e Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Calcolare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$$

(ii) Trovare tutte le soluzioni della equazione differenziale omogenea

$$u'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} u(x), \quad (1)$$

(iii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} u(x) + x, \\ u(0) = \log(2) \end{cases} \quad (2)$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \log(9 - |x^3 + 8|).$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

◦

◦

◦

◦

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

- (i) Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 4 in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (1 + x^2)^7$

$$f(x) =$$

Suggerimento facoltativo: ricordare che $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

- (ii) Determinare il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ tale che, per un opportuno $a \in \mathbb{R}$, si abbia

$$7x \sin(x) + \cos(x^2) - (1 + x^2)^7 = ax^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

$$a = \quad, n = \quad.$$

- (ii) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x \sin(x) + \cos(x^2) - (1 + x^2)^7}{\log(x^4 + \cos(x^2))} =$$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

- 1) Calcolare la primitiva $F(x)$ della funzione

$$f(x) = e^{-x} \cos(x)$$

che soddisfa $F(\pi) = 1$.

$$F(x) =$$

- 2) Determinare il limite della successione

$$a_n = \int_0^n e^{-x} \cos(x) dx$$

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$$