Terminologia

- data $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, diciamo che f è *di classe* C^1 se $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}$ sono continue
- f è *di classe* C^2 se $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}$ sono di classe C^1 ("tutte le derivate di f di ordine ≤ 2 sono continue")
- induttivamente: f è *di classe* C^k se $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}$ sono di classe C^{k-1} (cioè se f e tutte le sue derivate di ordine $\leq K$ sono continue).
- f è Lipschitziana *con costante* $L > 0$ se

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

17. (i) La funzione $|y - x|$ che compare al secondo membro dell'equazione differenziale è lipschitziana in y con costante di Lipschitz 1: infatti si ha

$$\| y_1 - x| - |y_2 - x\| \leqslant |(y_1 - x) - (y_2 - x)| = |y_1 - y_2|\,.$$

Di conseguenza, per ogni valore di a, il problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione, definita su tutto $\mathbf{R}$.

(ii) Ponendo

$$z(x) = y(x) - x\,,$$

il problema dato si traduce in

$$(1) \qquad \begin{cases} z' = |z| - 1 \\ z(0) = a \end{cases}$$

L'equazione $z' = |z| - 1$ ammette le due soluzioni costanti $z = 1$ e $z = -1$, che rappresentano le soluzioni di (1) nei casi $a = 1$ ed $a = -1$ rispettivamente. Di conseguenza ogni altra soluzione di (1) avrà un grafico che non interseca le due rette $z = 1$ e $z = -1$, grazie al *teorema di unicità*.
Così, se è $a > 1$, la soluzione di (1) resta sempre maggiore di 1, e quindi è anche soluzione dell'equazione

$$(2) \qquad z' = z - 1\,,$$

e analogamente se è $a < 1$ si ha $z(x) < 1$, quindi z risolve

$$(3) \qquad z' = -z - 1\,.$$

Ora si verifica facilmente che le soluzioni di (2) e di (3) sono rispettivamente le funzioni della forma

$$(4) \qquad z(x) = 1 + C_1 e^x$$

e

$$(5) \qquad z(x) = -1 + C_2 e^{-x}$$

al variare delle costanti C_1 e C_2.
Utilizzando la condizione iniziale $z(0) = a$ si trova che

$$(6) \qquad z(x) = 1 + (a - 1) e^x \qquad \text{se} \quad a > 1$$

$$(7) \qquad z(x) = -1 + (a + 1) e^{-x} \quad \text{se} \quad a < 1\,.$$

Resta da esaminare il caso in cui $-1 < a < 1$.
Detta z_a la soluzione di (1), si ha $|z_a(x)| < 1$ per ogni x, e quindi $z_a'(x) = |z_a(x)| - 1 < 0$. Dunque z_a è decrescente su $\mathbf{R}$, fra i due valori

$$\ell_1 = \lim_{x \to -\infty} z_a(x) = \sup z_a \quad , \quad \ell_2 = \lim_{x \to +\infty} z_a(x) = \inf z_a\,.$$

Ma allora da (1) si ricava

$$\lim_{x \to -\infty} z_a'(x) = |\ell_1| - 1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} z_a'(x) = |\ell_2| - 2\,,$$

e quindi necessariamente (v. il *teorema dell'asintoto* nell'Appendice).

$$|\ell_1| = |\ell_2| = 1\,.$$

In conclusione, essendo $\ell_1 > \ell_2$, si ha $\ell_1 = 1$ e $\ell_2 = -1$, cioè la funzione $z_a(x)$ decresce da 1 a -1 quando x varia da $-\infty$ a $+\infty$.

In particolare esiste uno ed un solo punto x_a per cui è

$$z_a(x_a) = 0 ,$$

e quindi z_a è della forma (4) per $x \leqslant x_a$ (cioè dove è positiva), e della forma (5) per $x \geqslant x_a$.
Più precisamente, se è $a \geqslant 0$, deve essere $x_a \geqslant 0$, e quindi $z_a(x)$ è data dalla (6) per $x \leqslant x_a$, mentre per $a \leqslant 0$ si ha $x_a \leqslant 0$, cosicché $z_a(x)$ è data dalla (7) per $x \geqslant x_a$.
Allora si ha, in particolare,

$$x_a = \begin{cases} \log \dfrac{1}{1-a} & \text{se } 0 \leqslant a < 1 \\ \log(1+a) & \text{se } -1 < a \leqslant 0 . \end{cases}$$

Infine, ricavando le costanti C_1 e C_2 in (4) e (5), si trovano facilmente le espressioni di $z_a(x)$ per $x \geqslant x_a$ quando $a > 0$ e per $x \leqslant x_a$ quando $a \leqslant 0$.
In conclusione, ricordando la posizione iniziale $y = x + z$, si ha

per $a \geqslant 1$, $\quad y(x) = x + 1 + (a-1)e^x$;

$$\text{per } 0 \leqslant a < 1 , \quad y(x) = \begin{cases} x + 1 - (1-a)e^x & \text{per } x \leqslant \log \dfrac{1}{1-a} \\ x - 1 + \dfrac{1}{1-a} e^{-x} & \text{altrimenti ;} \end{cases}$$

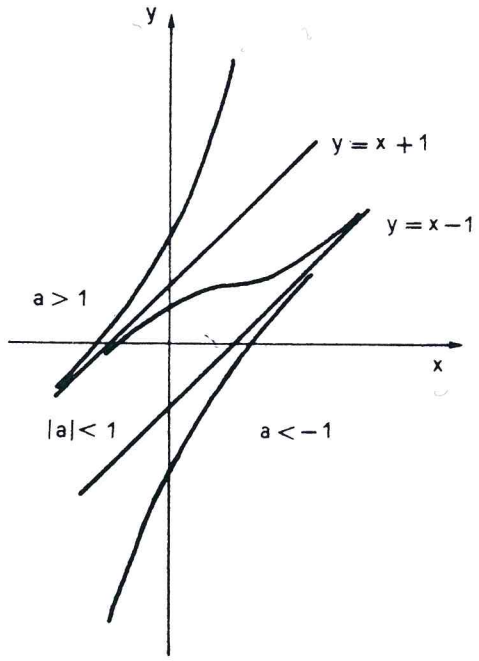
$$\text{per } -1 < a < 0 , \quad y(x) = \begin{cases} x + 1 - \dfrac{1}{a+1} e^x & \text{per } x \leqslant \log(1+a) \\ x - 1 + (1+a)e^x & \text{altrimenti ;} \end{cases}$$

per $a \leqslant -1$, $\quad y(x) = x - 1 + (1+a)e^{-x}$.

(iii) Per $|a| \leqslant 1$ si ha $x - 1 \leqslant y(x) \leqslant x + 1$ e quindi $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y(x)}{x} = 1$.

Per $a > 1$, si ha invece $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y(x)}{x} = +\infty$ mentre per $a < -1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{y(x)}{x} = +\infty$.

Un grafico approssimativo delle soluzioni è il seguente.



19. (i) La funzione $|y| + x^2$, che compare al secondo membro della equazione differenziale (*), è chiaramente lipschitziana in y, con costante di Lipschitz uguale ad 1. Pertanto le soluzioni di (*) sono definite su tutto **R**. Si ha poi, se $y(x)$ è una di tali soluzioni,

$$y'(x) > 0 \qquad \forall x \neq 0 ,$$

cosicché $y(x)$ è una funzione strettamente crescente su **R**. In particolare, se y_a è la soluzione che si annulla nel punto $x = a$, si avrà

$$y_a(x) < 0 \quad \text{per } x < a , \quad y_a(x) > 0 \quad \text{per } x > a .$$

Di conseguenza y_a risolve le equazioni lineari

$$y' = -y + x^2 \quad \text{per } x \leqslant a , \qquad y' = y + x^2 \quad \text{per } x \geqslant a ,$$

e quindi con facili calcoli si trova

$$y_a(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x + 2) - (a^2 - 2a + 2)\, e^{a-x} & \text{per } x \leqslant a \\ -(x^2 + 2x + 2) + (a^2 + 2a + 2)\, e^{x-a} & \text{per } x \geqslant a\,. \end{cases}$$

(ii) Come si è visto, ogni soluzione di (*) è crescente su **R**.
Da (*) si ricava poi, per ogni soluzione $y(x)$,

$$\lim_{x \to -\infty} y'(x) = \lim_{x \to +\infty} y'(x) = +\infty\,,$$

e quindi necessariamente

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty\,.$$

Allora esiste uno (ed un solo) numero reale a per cui $y(a) = 0$. In altre parole $y(x)$ è del tipo individuato in (i).

30. (a) La funzione $f(x, y)$ che compare al secondo membro dell'equazione è definita ed è di classe C^1 nell'insieme $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 1\}$, cioè nel piano privato della circonferenza unitaria. Ne segue che f è localmente lipschitziana rispetto ad y nell'insieme A, quindi per ogni $(x_0, y_0) \in A$ la soluizone del problema dato iesiste ed è unica in un intorno di x_0.

(b) Siccome il punto (0, 0) sta all'interno del cerchio unitario, cioè appartiene all'insieme

$$A^- = \{x^2 + y^2 < 1\}$$

dove f è negativa, la soluzione del problema rimane tutta all'interno di A^- ed è decrescente. Indicando con $]a, b[$ l'intervallo massimale di esistenza di questa soluzione $y(x)$, cominciamo col dimostrare che $a = -b$, provando che $y(x)$ è dispari.
Infatti la funzione $z(x) = -y(-x)$ verifica la condizione iniziale $z(0) = 0$, e inoltre

$$z'(x) = y'(-x) = f(-x, y(-x)) = f(x, -y(-x)) = f(x, z(x))\,;$$

di conseguenza $z(x)$ è un'altra soluzione del problema, e quindi $y(x) = z(x)$ per il *teorema di unicità*, cioè $y(x)$ è dispari.
Ci rimane solo da provare che $b < \sqrt{2}/2$.
Osserviamo che $f(x, y) < -1$ su $A \setminus \{(0, 0)\}$, pertanto $y'(x) < -1$ in $]0, b[$, quindi, integrando tra 0 e x, si ottiene $y(x) < -x$ per $x \in]0, b[$, e anche

$$\lim_{x \to b^-} y(x) < -b\,. \tag{1}$$

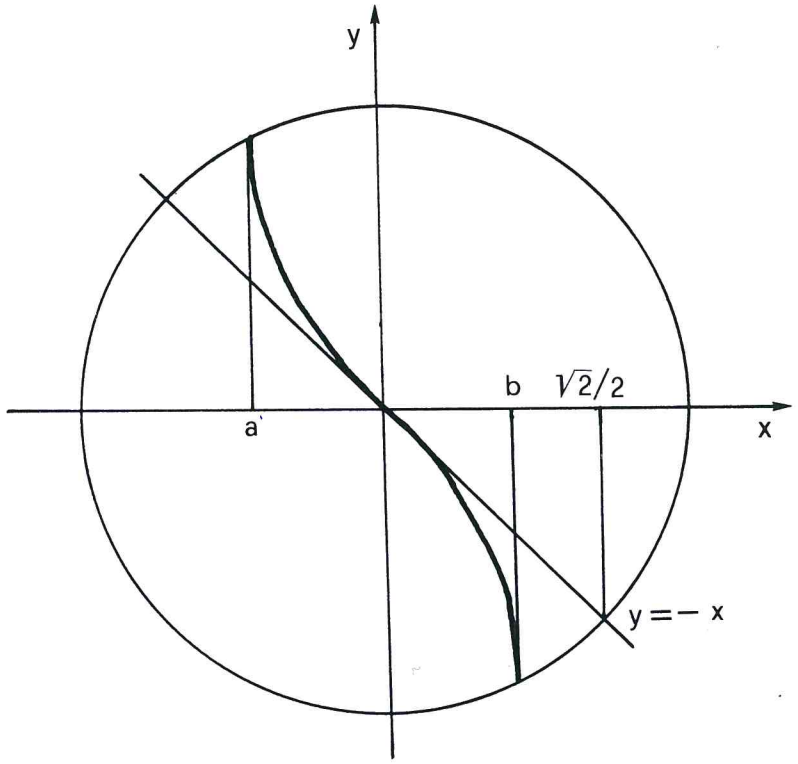
D'altra parte la soluzione non esce dal cerchio unitario, dunque

$$y(x) > -\sqrt{1 - x^2} \qquad \forall x \in [0, b[\,,$$

da cui

$$\lim_{x \to b^-} y(x) \geqslant -\sqrt{1 - b^2}\,.$$

Confrontando questa disuguaglianza con la (1) si ottiene subito che $b < \sqrt{2}/2$.
Un grafico approssimativo della soluzione è il seguente:



(c) Quando $x_0 > 1$ e $y_0 < -1$, il punto (x_0, y_0) si trova all'esterno del cerchio unitario, cioè nell'insieme $A^+ = \{x^2 + y^2 > 1\}$, e quindi la soluzione $y(x)$ rimane sempre in A^+. Allora $y(x)$ è crescente, e in particolare sta sempre all'esterno dell'insieme

$$B = \{(x, y) : x < x_0 \, , \, y > y_0\} \, .$$

Su $\mathbf{R}^2 \setminus B$ si ha poi

$$0 \leqslant f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - 1} \leqslant \frac{1}{\max(x_0, -y_0) - 1} = M < +\infty \, ,$$

cosicché la funzione $y'(x)$ si mantiene limitata.
Ma allora, per il *teorema di esistenza globale* (v. Appendice) l'intervallo di definizione di $y(x)$ è tutto $\mathbf{R}$.

33. (a) Mediante la sostituzione $z(x) = y(x) - x$, ci si riporta all'equazione

$$z'(x) = z(x)\,[z(x) - 2] \tag{1}$$

Questa ha ovviamente le soluzioni costanti $z = 0$ quando $\lambda = 0$ e $z = 2$ quando $\lambda = 2$. Inoltre, per il *teorema di unicità*, se è $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 2$ si ha $z(x) \neq 0$ e $z(x) \neq 2$ per ogni x, dunque nella (1) si può dividere per $z(z - 2)$ e separare le variabili:

$$\frac{z'}{z(z-2)} = 1 \, .$$

Integrando fra 0 e x si ricava $\displaystyle\int_0^x \frac{z'(t)\,dt}{z(t)\,[z(t) - 2]} = x \, ,$

cioè, ricordando che $z(0) = \lambda$, $\displaystyle\int_\lambda^{z(x)} \frac{dz}{z(z-2)} = x \, ,$

ovvero (con facili calcoli) $\displaystyle z(x) = \frac{2}{1 - \frac{\lambda - 2}{\lambda} e^{2x}} \, .$

Ritornando a y si ha l'espressione esplicita

$$y_\lambda(x) = x + \frac{2}{1 - \frac{\lambda - 2}{\lambda} e^{2x}} \tag{2}$$

che per $\lambda = 1$ diventa $\displaystyle y_1(x) = x + \frac{2}{1 + e^{2x}} \, ,$

e questa funzione è chiaramente definita su tutto $\mathbf{R}$.

Per il teorema di unicità, la parte (a) è provata.

(b) Quando $\lambda = 0$ o $\lambda = 2$ le soluzioni sono $y_0(x) = x$ e $y_2(x) = x + 2$, che non sono limitate.
Se è $0 < \lambda < 2$, si ha da (2) che y_λ è definita su $\mathbf{R}$ e

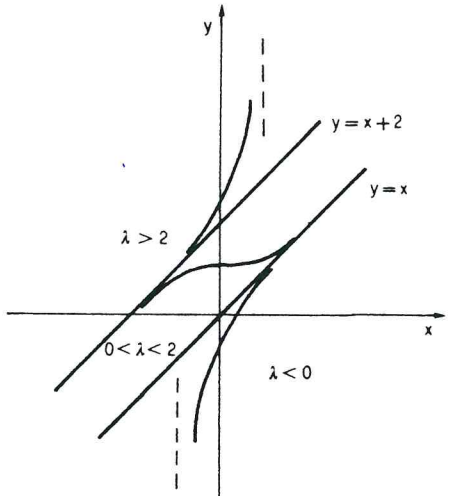
$$x < y_\lambda(x) < x + 2 \qquad \forall x \, ,$$

per il teorema di unicità, dunque y_λ non è limitata.
Se $\lambda > 2$ si ha che

$$1 + \frac{\lambda - 2}{\lambda} e^{2x} > 0 \iff x < \frac{1}{2} \log \frac{\lambda}{\lambda - 2} \, ,$$

pertanto y_λ è definita sulla semiretta $]-\infty \, , \, \frac{1}{2} \log \frac{\lambda}{\lambda - 2}[$ e non è limitata perché tende a $+\infty$ per $x \to \left(\frac{1}{2} \log \frac{\lambda}{\lambda - 2}\right)^-$.

Se $\lambda > 0$, si ha poi che y_λ è definita per $x > -\frac{1}{2} \log \frac{\lambda - 2}{\lambda}$ e non è limitata.
In conclusione, il problema non ha mai soluzioni limitate.
Un grafico approssimativo delle soluzioni è il seguente:



37. Posto $z(x) = y(x) - x$, il problema dato si traduce in

$$\begin{cases} z' = z^3 - 1 \\ z(0) = 0 \end{cases} .$$

Per tale problema esiste certamente una ed una sola soluzione $z(x)$, definita su un intervallo I: infatti la funzione $z \to z^3 - 1$ è di classe C^1 (e quindi localmente lipschitziana).
Supponiamo che I sia l'intervallo massimale di esistenza di tale soluzione, e poniamo

$$\xi = \inf I ;$$

proveremo che $\xi = -\infty$.
A questo proposito osserviamo che la costante 1 è una soluzione dell'equazione $z' = z^3 - 1$, e che $z(0) < 1$, dunque per il *teorema di unicità locale* dovrà essere

$$z(x) < 1 \qquad \forall x \in I ,$$

e quindi

$$z'(x) = z^3(x) - 1 < 0 \qquad \forall x \in I .$$

Dunque $z(x)$ è decrescente su I ed è minore di 1, quindi esiste finito il numero

$$\lambda = \lim_{x \to \xi^+} z(x) .$$

Se per assurdo ξ fosse un numero reale, risolvendo localmente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = z^3 - 1 \\ z(\xi) = \lambda \end{cases}$$

si potrebbe prolungare in modo C^1 la soluzione $z(x)$ in un intorno sinistro di ξ, contro l'ipotesi di massimalità di I. Dunque necessariamente

$$\inf I = -\infty .$$

Essendo $z^3 - 1 \neq 0$, da (1) si ha

$$\int_0^{z(x)} \frac{dz}{z^3 - 1} = \int_0^x dt ,$$

da cui, con qualche calcolo, si ricava

$$(1) \qquad \frac{1}{3} \log \frac{1 - z}{\sqrt{z^2 + z + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2z + 1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18} = x .$$

La soluzione in forma implicita si ottiene sostituendo $y(x) - x$ al posto di z. Da (1) si ricava pure che l'intervallo di definizione I è

$$I =]-\infty , \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} [.$$

50. La funzione che compare al secondo membro dell'equazione è definita sui semipiani $\{(x, y) : x > 0\}$ e $\{(x, y) : x < 0\}$, ed è lineare in y. Dalla teoria delle equazioni lineari possiamo allora concludere che il corrispondente problema di Cauchy ha una e una sola soluzione $y(x)$, definita su $]0, +\infty[$ se $x_0 > 0$ oppure su $]-\infty, 0[$ se $x_0 < 0$.
Eseguendo la trasformazione $z(x) = y(x)\, e^x$, oppure applicando direttamente le tecniche standard di risoluzione delle equazioni lineari, si trova poi la formula risolutiva cercata:

$$(1) \qquad y(x) = e^{-x} \left(\int_{x_0}^{x} e^t \log |t| \, dt + y_0 \, e^{x_0} \right) .$$

Questa è valida per $x > 0$ se $x_0 > 0$, per $x < 0$ se $x_0 < 0$.
Osserviamo che la funzione $\psi(t) = e^t \log |t|$ è integrabile in ogni intorno del punto $t = 0$, in quanto, per le note proprietà del logaritmo, si ha

$$|\psi(t)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{|t|}} \qquad \forall t \in [-1, 1] , \quad t \neq 0$$

per un'opportuna costante $M > 0$, e quindi

$$\int_{-1}^{-\epsilon} |\psi(t)| \, dt + \int_{\epsilon}^{1} (\psi(t)| \, dt \leqslant 4M \qquad \forall \epsilon \in]0, 1[.$$

Di conseguenza per ogni soluzione della forma (1) esiste finito $\lim_{x\to 0^+} y(x)$ oppure $\lim_{x\to 0^-} y(x)$, a seconda del segno di x_0. Possiamo concludere che le soluzioni dell'equazione sono le funzioni del tipo

$$(2) \qquad y(x) = e^{-x}\left(\int_0^x e^t \log|t|\,dt + c\right),$$

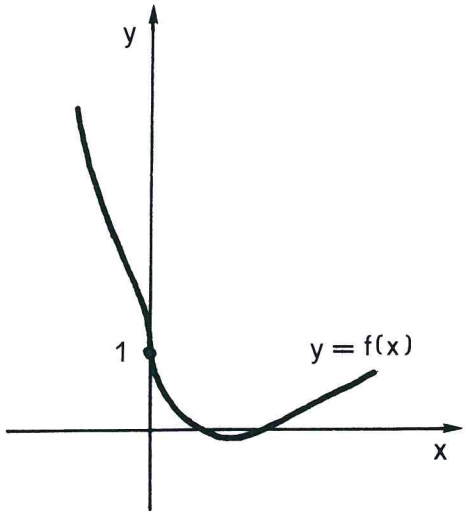
dove c è un'arbitraria costante reale. Come al solito, si intende che sono definite solo per $x > 0$ o per $x < 0$, in quanto si vede subito che per ogni funzione del tipo (2) si ha

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = -\infty \quad ,$$

cioè queste funzioni non sono derivabili in $x = 0$.
Da (2) si deduce $y(0) = c$, pertanto, scelta $c = 1$, la funzione

$$f(x) = e^{-x}\left(\int_0^x e^t \log|t|\,dt + 1\right)$$

gode di tutte le proprietà richieste.
Inoltre f è chiaramente unica, in quanto se $g(x)$ fosse un'altra funzione con le stesse proprietà, per $x > 0$ essa dovrebbe avere la forma (2), con $c = g(0)$, pertanto $c = 1$ e $g = f$.
Un grafico della funzione $f(x)$ è il seguente:



54. Poiché l'equazione è lineare ed ha coefficienti continui su **R**, il problema di Cauchy proposto ha una ed una sola soluzione $y(x)$, definita su tutto **R**.
Ponendo

$$y(x) = e^x z(x)$$

si trova che

$$z'(x) = e^x \operatorname{sen} x\,.$$

D'altra parte, eseguendo successivamente due integrazioni per parti, si ha

$$z(x) - z(0) = \int_0^x e^t \operatorname{sen} t\,dt = \frac{1}{2}\,e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{1}{2}\,,$$

pertanto l'espressione esplicita della soluzione $y(x)$ è la seguente:

$$y(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + \left(\frac{1}{2} + a\right)e^{-x}\,.$$

Da questa si deduce facilmente che $y(x)$ è limitata su $[0, +\infty[$ e non ha limite per $x \to +\infty$, quale che sia il valore di a.

58. L'equazione omogenea $y'' + y = 0$ ha come soluzione generale $y(t) = A\cos t + B \operatorname{sen} t$, pertanto cerchiamo una soluzione del tipo

$$y(t) = A(t)\cos t + B(t)\operatorname{sen} t\,.$$

Applicando il *metodo di variazione delle costanti* si ha

$$\begin{cases} A'(t)\cos t + B'(t)\operatorname{sen} t = 0 \\ -A'(t)\operatorname{sen} t + B'(t)\cos t = 1/(1+t^2) \end{cases}$$

da cui, con facili calcoli, si ricava

$$A'(t) = -\frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}\ , \quad B'(t) = \frac{\cos t}{1+t^2}$$

e infine

$$y(t) = \left(y(0) - \int_0^t \frac{\operatorname{sen} s}{1+s^2}\, ds\right)\cos t +$$

$$+ \left(y'(0) + \int_0^t \frac{\cos s}{1+s^2}\, ds\right)\operatorname{sen} t\ ,$$

che è la formula risolutiva cercata.
Osserviamo ora che il limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} s}{1+s^2}\, ds$$

esiste finito: basta notare che se $t_1 < t_2$ allora

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{sen} s}{1+s^2}\, ds \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{1+s^2} = \operatorname{arctg} t_2 - \operatorname{arctg} t_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t_1\ ,$$

e applicare il criterio di Cauchy. Poniamo

$$A = y(0) - \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{1+s^2}\, ds\ .$$

Calcoli analoghi valgono per $\int_0^{+\infty} \frac{\cos s}{1+s^2}\, ds$: poniamo allora

$$B = y'(0) + \int_0^{+\infty} \frac{\cos s}{1+s^2}\, ds\ .$$

Con queste scelte di A e B si ha

$$|\, y(t) - (A\cos t + B\operatorname{sen} t)| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_t^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{1+s^2}\, ds\right| + \left|\int_t^{+\infty} \frac{\cos s}{1+s^2}\, ds\right|$$

e quindi

$$\lim_{t\to+\infty} [y(t) - (A\cos t + B\operatorname{sen} t)] = 0\ .$$

61. (i) Sia y una soluzione polinomiale dell'equazione (*). Se y è costante, cioè $y(x) = c$ per ogni x, si ha necessariamente $c = 0$.
Se invece y è un polinomio di grado $N \geqslant 1$, la sua derivata y' è un polinomio di grado $N - 1$, e quindi $[y'(x)]^2$ e $xy'(x)$ hanno gradi $2N - 2$ ed N rispettivamente. Di conseguenza $-xy'(x) + y(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale ad N, ma è uguale al polinomio $[y'(x)]^2$, cosicché

$$2N - 2 \leqslant N\ ,$$

cioè

$$N \leqslant 2\ .$$

Vediamo allora quali polinomi del tipo

$$y(x) = ax^2 + bx = c$$

risolvono (*): per questa scelta di y la (*) diviene

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 2ax^2 + bx - ax^2 - bx - c = 0 ,$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 4a^2 + a = 0 \\ 4ab = 0 \\ c = b^2 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono

$$a = -1/4 \quad , \quad b = c = 0$$

e

$$a = 0 , \quad b = \lambda , \quad c = \lambda^2 ,$$

con λ costante arbitraria, cosicché le soluzioni polinomiali di (*) sono la parabola

(1) $$y(x) = -\frac{x^2}{4}$$

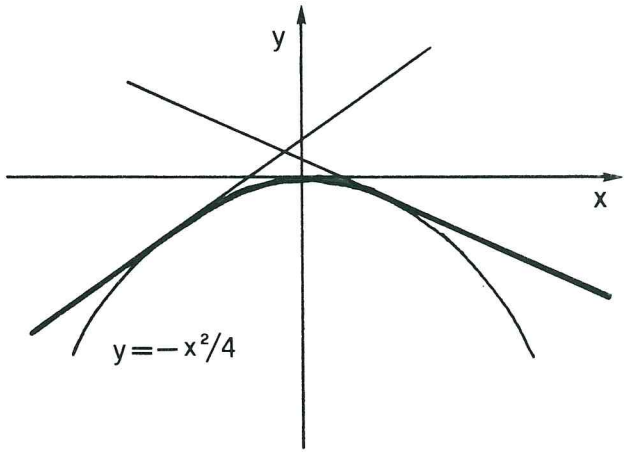
e le rette

$$y(x) = \lambda x + \lambda^2 \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R} .$$

E' facile verificare che queste rette sono tutte le tangenti alla parabola $y = -x^2/4$: infatti la tangente alla parabola nel punto $(\xi, -\xi^2/4)$ ha equazione $y + \xi x/2 - \xi^2/4 = 0$.

(ii) Vediamo ora per quali $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ esiste qualche soluzione y di (*) tale che

(2) $$y(x_0) = y_0 .$$



Anzitutto, se una tale soluzione esiste, il numero $z = y'(x_0)$ è una radice dell'equazione di secondo grado

$$z^2 + x_0 z - y_0 = 0 ,$$

e quindi si deve avere

(3) $$x_0^2 + 4y_0 \geqslant 0 .$$

D'altra parte se vale (3), cioè se $y_0 \geqslant -x_0^2/4$, vi sono soluzioni di (*) che verificano (2): ad esempio, le due tangenti alla parabola (1) se è $y_0 > -x_0^2/4$, la tangente alla parabola e la parabola stessa se è $y_0 = -x_0^2/4$. In conclusione, (3) è la condizione necessaria e sufficiente perché esista qualche soluzione di (*) che verifica (2). Oltre alla parabola (1) e alle sue tangenti, (*) ha come soluzioni C^1 (ma non C^2) anche le curve formate da un arco di (1) e dalle sue semirette tangenti agli estremi.

85. (a) Il secondo membro $f(x, y) = |y| - \operatorname{arctg} e^x$ è lipschitziano in y e soddisfa le ipotesi del *teorema di esistenza globale* (v. appendice), quindi il problema di Cauchy assegnato ammette una ed una sola soluzione $y(x)$ definita su tutto $\mathbf{R}$, quale che sia y_0.
Consideriamo il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} z' = z - \operatorname{arctg} e^x \\ z(0) = y_0 > 0 \ ; \end{cases}$$

anch'esso ha una soluzione $z(x)$ definita su tutto $\mathbf{R}$, e positiva in un intorno di $x = 0$. Se $z(x)$ è sempre positiva, sarà $z(x) \equiv y(x)$; se invece $z(x)$ si annulla, sarà soluzione del problema di Cauchy assegnato nell'intorno di $x = 0$ in cui essa è positiva. Risolviamo dunque (1) : moltiplicando l'equazione per e^{-x} e integrando, si trova

$$(2) \qquad z(x) = e^x \left(y_0 - \int_0^x e^{-t} \operatorname{arctg} e^t \, dt \right) =$$

$$= \operatorname{arctg} e^x + \frac{1}{2} e^x \log(1 + e^{-2x}) - e^x \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2} - y_0 \right).$$

E' chiaro che $z(x) > 0$ su $\mathbf{R}$ qualora sia

$$y_0 \geqslant \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2} \ .$$

Inoltre $z(x)$ si può scrivere nella forma

$$(3) \quad z(x) = \left(\operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{4} e^x \right) + \frac{1}{2} e^x (\log(1 + e^{-2x}) - \log 2) + y_0 e^x .$$

Tenendo presente che

$$\operatorname{arctg} t > \frac{\pi}{4} t \qquad \forall t \in]0, 1[$$

$$\log(1 + t^{-2}) > \log 2 \qquad \forall t \in]0, 1[$$

si ricava da (3) che

$$z(x) > 0 \qquad \forall x \leqslant 0$$

indipendentemente da $y_0 > 0$.
Se è

$$0 < y_0 < \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2} \ ,$$

da (2) si ottiene

$$\lim_{x \to +\infty} z(x) = -\infty \ ,$$

pertanto $z(x)$ si annulla in un punto $x_0 > 0$.
In quel punto è $z'(x) = -\operatorname{arctg} e^{x_0} < 0$, pertanto $y(x)$ è negativa in un intorno destro di x_0.
Risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} w' = -w - \operatorname{arctg} e^x \\ w(x_0) = 0 \end{cases}$$

si ottiene

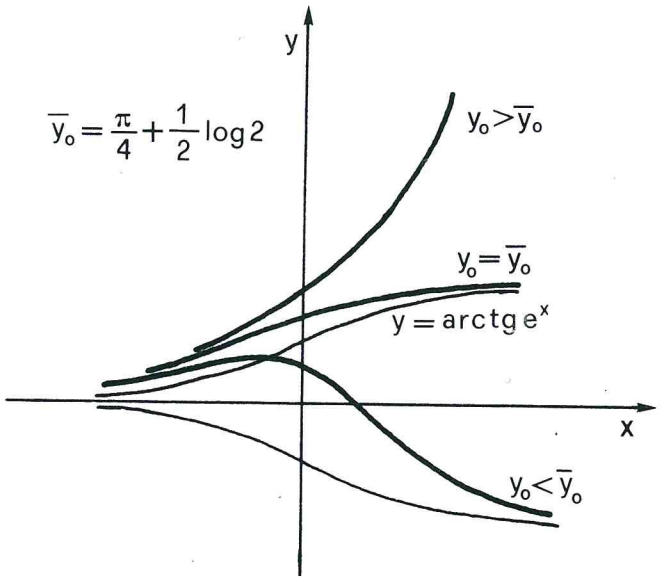
$$(4) \quad w(x) = -e^{-x} [e^x \operatorname{arctg} e^x - e^{x_0} \operatorname{arctg} e^{x_0} + \log(1 + e^{2x}) -$$

$$- \log(1 + e^{2x_0})] \ ,$$

e si vede chiaramente che $w(x) < 0$ per $x > x_0$, pertanto $y(x) = w(x)$ per $x > x_0$. Si ricava allora da (4)

$$\lim_{x \to +\infty} w(x) = -\frac{\pi}{2} \ ,$$

indipendentemente da x_0, e quindi da y_0. Un grafico approssimativo delle soluzioni $y(x)$ nei vari casi è il seguente:



(b) Si ricava da (2) che per $y_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2}$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \dot{y}(x) = \frac{\pi}{2} .$$

93. Con il cambiamento di variabili $x + y(x) = z(x)$ l'equazione diventa

$$z'(x) = 2 - \log z(x) . \tag{1}$$

Il secondo membro $f(z) = 2 - \log z$ è definito per $z > 0$, ed è localmente lipschitziano perché di classe C^1. Per il *teorema di Cauchy-Lipschitz*, per ogni punto (x_0, z_0) con $z_0 > 0$ passa allora una ed una sola soluzione di (1).
La costante $z(x) \equiv e^2$ è una soluzione particolare, dunque per ogni altra soluzione sarà sempre $z(x) < e^2$ oppure sempre $z(x) > e^2$. Cominciamo a studiare il primo caso: sia $z_0(x)$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $z(0) = 1$. Poiché $1 < e^2$, la funzione z_0 è crescente; inoltre per $x \geqslant 0$ si ha $1 \leqslant z_0(x) \leqslant e^2$, pertanto

$$0 \leqslant f(z_0(x)) \leqslant 2 .$$

Allora z_0 è definita su tutta la semiretta $[0, +\infty[$, ed essendo crescente ammette limite:

$$\lim_{x \to +\infty} z_0(x) = l \in]1, e^2] . \tag{2}$$

Non può essere $l < e^2$, perché in tal caso si avrebbe $\lim_{x \to +\infty} z_0'(x) = 2 - \log l > 0$, che è in contraddizione con (2). Allora $l = e^2$, e $\lim_{x \to +\infty} z_0'(x) = 0$. Invece, z_0 non può essere definita su tutto $]-\infty, 0]$: infatti z_0 è concava, perché da (1) segue

$$z''(x) = -\frac{z'(x)}{z(x)} ,$$

e sia z_0 sia z_0' sono positive; allora $z_0(x)$ sta sempre al di sotto della sua retta tangente nel punto $x = 0$, che è la retta $z = 2x + 1$; essa interseca l'asse x per $x = -\frac{1}{2}$, pertanto l'intervallo massimale di definizione di z_0 è del tipo $]x_0, +\infty[$, con $-\frac{1}{2} < x_0 < 0$. E' facile vedere che deve essere

$$\lim_{x \to x_0^+} z_0(x) = 0$$

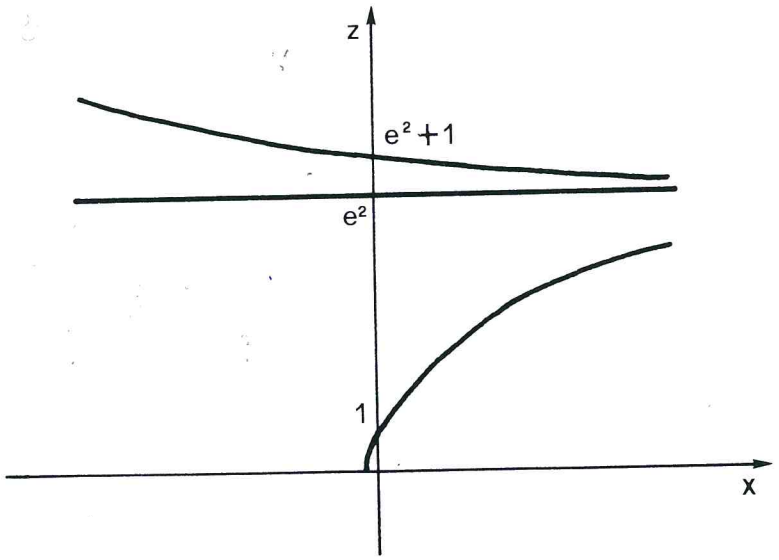
e quindi

$$\lim_{x \to x_0^+} z_0'(x) = +\infty .$$

Sia ora (a, b) un punto della striscia $\{(x, z) : 0 < z < e^2\}$. Lo studio di z_0 ci permette di affermare che esiste un punto x_b in cui $z_0(x_b) = b$. Poniamo

$$z(x) = z_0(x + x_b - a) : \tag{3}$$

allora si verifica facilmente che $z(x)$ risolve (1), e che $z(a) = b$, quindi la (3) è la soluzione di (1) passante per (a, b).



Consideriamo ora la soluzione $z_1(x)$ di (1) passante per $(0, e^2 + 1)$: questa è decrescente e maggiore di e^2, pertanto dalla disuguaglianza $\log t \leqslant t - 1$ si ottiene

$$3 - z_1(x) \leqslant f(z_1(x)) \leqslant 0 ,$$

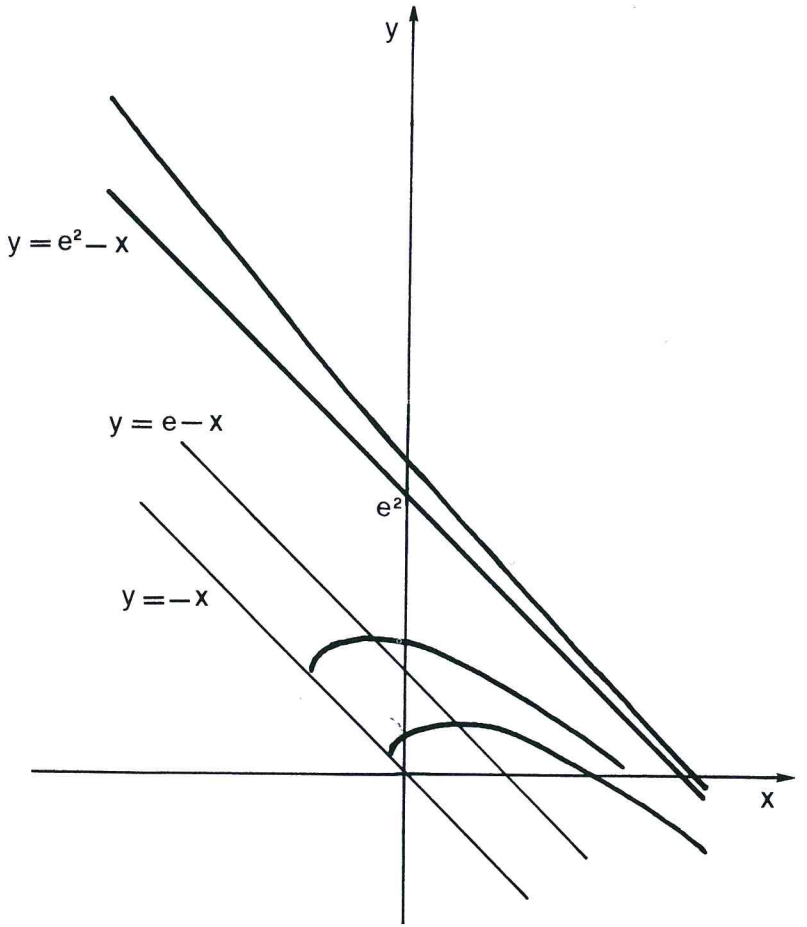
dunque per il *teorema di esistenza globale* (v. appendice) la soluzione z_1 è definita su tutto **R**.
Come prima, si verifica che

$$\lim_{x \to +\infty} z_1(x) = e^2 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} z_1'(x) = 0$$

e, sempre con ragionamenti analoghi, che

$$\lim_{x \to -\infty} z_1(x) = +\infty , \quad \lim_{x \to -\infty} z_1'(x) = -\infty .$$

Come nel caso precedente, tutte le soluzioni di (1) che stanno sopra la retta $z = e^2$ sono traslate di $z_1(x)$.
E' facile a questo punto disegnare le soluzioni $y(x)$ dell'equazione assegnata, facendo l'unica osservazione che $y'(x) = 0$ sulla retta $y = e - x$.



102. Sia $\bar{u}$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$u'(x) = f(u(x)) \,. \tag{1}$$

Indichiamo con $I =]\alpha, \beta[$, dove $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione u; dobbiamo provare che, nelle ipotesi fatte su f, si ha

$$\alpha = -\infty \,.$$

A tale scopo osserviamo che per l'equazione (1) vale il *teorema di esistenza e unicità locale,* e che la funzione identicamente nulla è una soluzione di (1). Per la crescenza di f e per l'ipotesi $f(0) = 0$ si ha poi

$$f(t) > 0 \quad \text{per } t > 0 \,, \quad f(t) < 0 \quad \text{per } t < 0 \,. \tag{2}$$

Allora necessariamente

$$\bar{u}(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in I \tag{3}$$

oppure

$$\bar{u}'(x) < 0 \qquad \forall x \in I \cdot \tag{4}$$

Nel primo caso si ha, per (2),

$$\bar{u}'(x) = f(\bar{u}(x)) \geqslant 0 \,,$$

pertanto $\bar{u}$ è non decrescente, dunque per (3) esiste finito

$$u_0 = \lim_{x \to \alpha^+} \bar{u}(x) \,.$$

Se fosse $\alpha > -\infty$, risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(\alpha) = u_0 \end{cases}$$

potremmo prolungare $\bar{u}$ a sinistra di $x = \alpha$, contraddicendo la massimalità di I. Nel caso (4) il ragionamento è analogo, dunque necessariamente $\alpha = -\infty$.
Si osservi che relativamente ad f abbiamo usato solo la lipschitzianità e l'ipotesi (2).

105. L'equazione ha senso per $x + y \neq 0$. Moltiplicando ambo i membri per $x + y$ si ottiene

$$yy' + xy' + y - x + 2 = 0 \,,$$

cioè

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2} + xy - \frac{x^2}{2} + 2x\right) = 0 \,.$$

Si ha dunque, per le soluzioni dell'equazione, la rappresentazione implicita

$$\frac{y^2}{2} + xy - \frac{x^2}{2} + 2x = k \,, \tag{1}$$

con k costante reale.
E' facile vedere che la (1) rappresenta, al variare di k, il fascio di iperboli di centro $(1, -1)$ e di asintoti

$$y = (-1 - \sqrt{2})(x - 1) - 1 \,, \quad y = (-1 + \sqrt{2})(x - 1) - 1 \,:$$

infatti con il cambiamento di coordinate

$$x = X + 1 \,, \qquad y = Y - 1$$

la (1) diventa

$$\frac{Y^2}{2} + XY - \frac{X^2}{2} = k - 1 \,,$$

ovvero

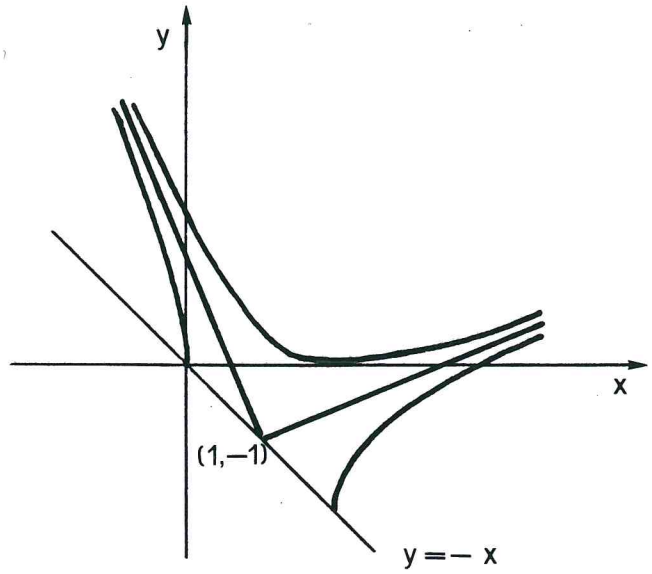
$$[Y - (-1 - \sqrt{2})X]\,[Y - (-1 + \sqrt{2})X] = 2(k - 1) \,.$$

Da (1) si ricava anche la rappresentazione esplicita delle soluzioni: per $k > 1$ si hanno le soluzioni globali

$$y_1(x) = -x - \sqrt{2[(x-1)^2 + k - 1]} \,,$$

$$y_2(x) = -x + \sqrt{2[(x-1)^2 + k - 1]} \,,$$

mentre per $k \leqslant 1$ si hanno soluzioni della stessa forma, ma definite solo sulla semiretta $]-\infty, 1 - \sqrt{1-k}[$ oppure sulla semiretta $]1 + \sqrt{1-k}, +\infty[$. Un grafico delle soluzioni (nel solo semipiano $y > -x$) è il seguente:



114. Osserviamo anzitutto che, se $y(x) \equiv c$ è una soluzione costante dell'equazione, necessariamente è $c = 0$.
Sia ora y una soluzione non costante dell'equazione: esisterà qualche punto x_0 nel quale è $y'(x_0) \neq 0$.
Poiché la funzione

$$\tilde{y}(x) = y(-x)$$

è un'altra soluzione dell'equazione, e $\tilde{y}'(-x_0) = -y'(x_0)$, possiamo supporre (rimpiazzando eventualmente y con $\tilde{y}$) che sia

$$y'(x_0) > 0 .$$

Proveremo che in tal caso y non può essere definita su tutta la semiretta $[x_0, +\infty[$. Infatti, se così non fosse, posto

$$z(x) = y'(x) ,$$

dall'equazione differenziale data si ricaverebbe

(1) $$z'(x) \geqslant z^2(x) ,$$

e quindi in particolare $z'(x) \geqslant 0$, da cui anche

$$z(x) \geqslant z(x_0) > 0 \qquad \forall x \geqslant x_0 .$$

Possiamo allora dividere per z^2 nella (1), ottenendo

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{z(x)}\right) \geqslant 1 \qquad \forall x \geqslant x_0 ,$$

e quindi

$$\frac{1}{z(x_0)} - \frac{1}{z(x)} \geqslant x - x_0 \qquad \forall x \geqslant x_0 .$$

Ma da questa disuguaglianza segue

$$x \leqslant \frac{1}{z(x_0)} + x_0 - \frac{1}{z(x)} \leqslant \frac{1}{z(x_0)} + x_0 \qquad \forall x \geqslant x_0 ,$$

che è assurdo.

121. (a) Non si può applicare direttamente a (*) il teorema di esistenza globale, perché si tratta di un'equazione del secondo ordine. Anziché passare ad un sistema del primo ordine, risolveremo direttamente la questione proposta. Sia $y_0(x)$ una soluzione di (*), e sia $]a, b[$ il suo intervallo massimale di definizione. Supponiamo che sia $b < +\infty$; scelto $x_0 \in]a, b[$, si ha allora

$$|y_0''(x)| \leqslant 1 + |\log x| \leqslant c \qquad \forall x \in [x_0, b[,$$

quindi la funzione $y_0'(x)$, che è continua in $[x_0, b[$ ed ha derivata limitata, è uniformemente continua su $[x_0, b[$. In particolare, $y_0'(x)$ è limitata in $[x_0, b[$, ed esiste finito

$$\lim_{x \to b^-} y_0'(x) = \beta .$$

Dalla limitatezza di y_0' segue che $y_0(x)$ è uniformemente continua in $[x_0, b[$, quindi esiste finito anche

$$\lim_{x \to b^-} y_0(x) = \alpha .$$

Risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = e^{-y^2} - \log x \\ y(b) = \alpha \\ y'(b) = \beta \end{cases}$$

si può allora prolungare $y_0(x)$ a destra di $x = b$, contro la massimalità di $]a, b[$, pertanto $b = +\infty$. Per provare che $a = 0$ si procede in modo analogo.

(b) Si vede subito che $\lim_{x \to +\infty} y''(x) = -\infty$. Più precisamente, per $x \geqslant e^2$ si ha

$$y''(x) \leqslant 1 - 2 = -1 ,$$

e quindi, integrando su $[e^2, x]$,

$$y'(x) \leqslant y'(e^2) - (x - e^2) \qquad \forall x \geqslant e^2 .$$

Integrando di nuovo si ottiene

$$y(x) \leqslant -\frac{x^2}{2} + [e^2 + y'(e^2)]\, x + y(e^2) - \frac{e^4}{2} - e^2 y'(e^2) \qquad \forall x \geqslant e^2 ,$$

quindi

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty .$$

125. Il secondo membro $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} y}{x + y}$ dell'equazione non è definito sulla retta $y = -x$, quindi possiamo limitarci a studiare il problema nel semipiano $\{(x, y) : x + y > 0\}$ al quale appartiene il punto iniziale $(0, 1)$.

In tale semipiano la funzione f è di classe C^1, pertanto per il *teorema di Cauchy-Lipschitz* esiste ed è unica la soluzione $y(x)$ del problema. Notiamo che l'equazione ha le due soluzioni costanti $y = 0$ e $y = \pi$; ne segue, per l'unicità, che si ha

$$0 < y(x) < \pi . \tag{1}$$

In particolare $\operatorname{sen} y(x) > 0$, e quindi $y'(x) > 0$, cioè la soluzione $y(x)$ è crescente.

Esaminiamo il comportamento a destra di $x = 0$: è $y(x) \geqslant 1$, quindi

$$|f(x, y(x))| \leqslant \frac{1}{x + 1} \leqslant 1$$

per $x \geqslant 0$, ed il *teorema di esistenza globale* (v. appendice) assicura che $y(x)$ è definita su tutta la semiretta $[0, +\infty[$. Posto

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \ell \in]1, \pi] ,$$

proviamo che è $\ell = \pi$: se così non fosse, da

$$1 \leqslant y(x) \leqslant \ell \qquad \forall x \geqslant 0$$

seguirebbe

$$\operatorname{sen} y(x) \geqslant \alpha > 0 \qquad \forall x \geqslant 0 , \tag{2}$$

dove $\alpha = \min \{\operatorname{sen} 1, \operatorname{sen} \ell\}$. Da (1) e (2) segue poi

$$y'(x) \geqslant \frac{\alpha}{x + \pi} \qquad . \forall x \geqslant 0 ,$$

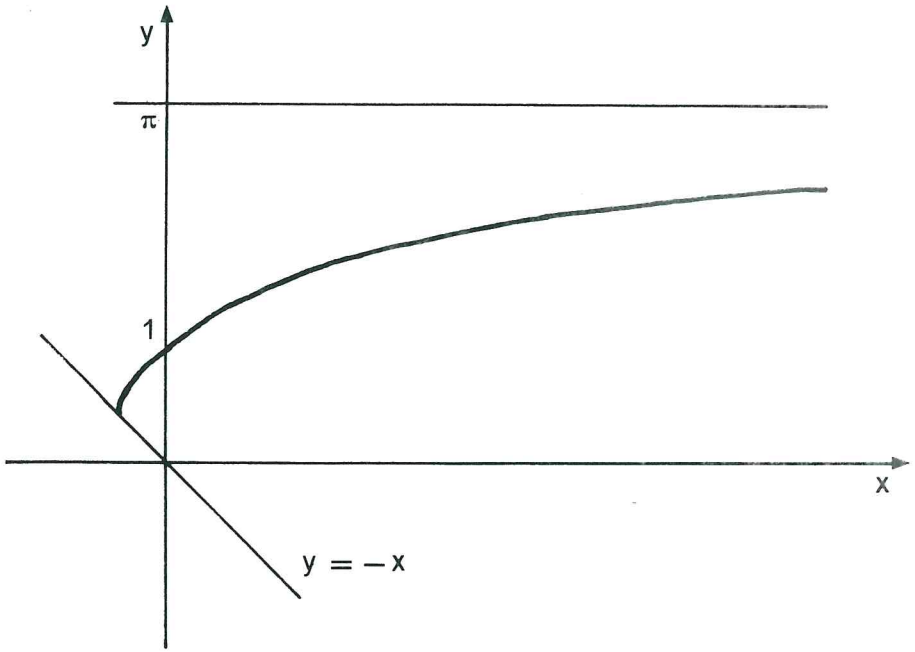
e integrando questa disuguaglianza su $[0, x]$ si giunge a

$$y(x) \geqslant 1 + \alpha \log\left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \qquad \forall x \geqslant 0 ,$$

che è una contraddizione perché comporta che $\ell = +\infty$.

Per $x < 0$, invece, la soluzione deve stare sopra la retta $y = -x$ e sotto la $y = \pi$, quindi non può essere definita su tutto $\mathbf{R}^-$. Dovendo essere crescente, $y(x)$ incontra necessariamente la retta $y = -x$ in un punto di ascissa $k < 0$, e chiaramente si ha $\lim_{x \to k^+} y'(x) = +\infty$.

Per stimare k, osserviamo che



$$y''(x) = \frac{(\operatorname{sen} y)\,(\cos y - 1 - \dfrac{\operatorname{sen} y}{x+y})}{(x+y)^2} < 0\,,$$

cioè $y(x)$ è concava: in particolare, sta al di sotto della retta $y = 1 + x \operatorname{sen} 1$, che è tangente ad $y(x)$ in $x = 0$. Poiché questa retta incontra la $y = -x$ in $x = -1/(1 + \operatorname{sen} 1)$, si ha

$$k > -1/(1 + \operatorname{sen} 1)\,.$$

Se poi nell'equazione originaria si pone $x + y = s$, si ottiene

$$s'(x) = 1 + y'(x) = 1 + \frac{\operatorname{sen} y(x)}{x + y(x)} < 1 + \frac{1}{s(x)}\,,$$

cioè

$$\frac{d}{dx}\,[s(x) - \log(1 + s(x))] < 1\,.$$

Integrando questa disuguaglianza su $]k,\ 0[$ e ricordando che $s(0) = 1$, $s(k) = 0$, si ottiene l'altra stima

$$k < \log 2 - 1\,.$$