

17. (22/10/1976)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y-x| \\ y(0) = a \end{cases} .$$

(i) Discutere, al variare del parametro reale a , l'esistenza e l'unicità locale e globale di soluzioni.

(ii) Determinare la soluzione del problema.

(iii) Dire per quali valori di a esistono soluzioni $y(x)$ del problema tali che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 1 .$$

19. (14/1/1977)

Si consideri l'equazione differenziale

$$(*) \quad y' = |y| + x^2 .$$

(i) Trovare la soluzione $y(x)$ di (*) tale che $y(a) = 0$, con a parametro reale.

(ii) Esistono altre soluzioni di (*) oltre a quelle trovate in (i)?

30. (19/5/1978)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - 1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} .$$

(a) Dire per quali (x_0, y_0) il problema è localmente risolubile.

(b) Sia $x_0 = y_0 = 0$, e sia $]a, b[$ il massimo intervallo su cui esiste una soluzione. Provare che $-a = b < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) Provare che per $x_0 > 1, y_0 < -1$ esiste una soluzione definita su tutto $\mathbf{R}$.

33. (6/6/1978)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - (y-x)(y-x-2) \\ y(0) = \lambda \end{cases} .$$

(a) Provare che per $\lambda = 1$ esiste una ed una sola soluzione $y(x)$ definita su tutto $\mathbf{R}$.

(b) Dire per quali valori di λ il problema ha qualche soluzione limitata.

37. (30/6/1978)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-x)^3 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Dimostrare che la soluzione esiste su tutta la semiretta $x \leq 0$, e calcolarla (in forma implicita).

50. (25/1/1979)

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log|x| - y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (x_0 \neq 0) ,$$

e dedurre che esiste una ed una sola funzione continua $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, derivabile per $x \neq 0$ e tale che

$$f'(x) = \log|x| - f(x) \quad \forall x \neq 0, \quad f(0) = 1 .$$

54. (29/1/1979)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen} x - y \\ y(0) = a \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che la soluzione $y(x)$ è definita su tutto $\mathbf{R}$.
- (b) Dire se $y(x)$ è limitata su $\mathbf{R}^+$.
- (c) Dire se $y(x)$ ha limite per $x \rightarrow +\infty$.

58. (9/5/1980)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + y = \frac{1}{1+t^2}$$

Trovare una formula risolutiva di tale equazione. Dimostrare che per ogni soluzione $y(t)$ esistono due costanti, A e B , per cui

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [y(t) - (A \cos t + B \sin t)] = 0$$

61. (16/6/1980)

Si consideri l'equazione differenziale

$$(*) \quad (y')^2 + xy' - y = 0$$

- (i) Trovare tutti i polinomi che sono soluzioni di (*).
- (ii) Dire per quali (x_0, y_0) l'equazione (*) ha almeno una soluzione $y(x)$ tale che $y(x_0) = y_0$.

85. (24/5/1982)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| - \operatorname{arctg} e^x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- (a) Determinare l'andamento della soluzione $y(x)$ al variare di y_0 .
- (b) Dimostrare in particolare che per un opportuno valore di y_0 si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{\pi}{2}$$

93. (5/7/1982)

Studiare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 1 - \log(x + y)$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

102. (22/10/1982)

Sia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di classe C^1 , ^{strettamente} crescente e tale che $f(0) = 0$. Provare che tutte le soluzioni $u(x)$ dell'equazione

$$u' = f(u)$$

sono definite in un intervallo del tipo $]-\infty, a[$. (eventualmente $a = +\infty$)

105. (21/1/1983)

Studiare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x - y - 2}{x + y}$$

114. (11/5/1984)

Sia $y(x)$ una soluzione non identicamente nulla dell'equazione differenziale

$$y'' = y^2 + (y')^2 ;$$

provare che $y(x)$ non può essere definita su tutto $\mathbf{R}$.

121. (3/7/1984)

Data l'equazione differenziale del secondo ordine

$$(*) \quad y'' = e^{-y^2} - \log x ,$$

definita sul semipiano $\{(x, y) : x > 0\}$, provare che:

(i) le soluzioni di (*) sono definite su tutta la semiretta $]0, +\infty[$;

(ii) per ogni soluzione $y(x)$ di (*) si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty .$$

125. (8/10/1984)

Studiare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\sin y}{x + y} \\ y(0) = 1 \end{cases} ,$$

tracciandone anche un grafico approssimativo.