

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

127. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^m)^{1/x^k}$

129. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^{\frac{1}{2}} - 1)}{\ln x}$

131. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\arctg x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} \right)$

133. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin^2 x}{x} \right)^x$

135. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x + x^2}$

137. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$

139. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x)^2 + \ln(1 - \sin^2 x)}{\cosh^2 x - 1}$

141. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \sin x}{1 + \cos^2 x}$

128. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-x} - 1}{x}$

130. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{A} - 1 \right)$

132. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin x \right)^{\frac{1}{3x}}$

134. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

136. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x}$

138. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ x - x^2 \ln \left(1 + \sin \frac{1}{x} \right) \right\}$

142. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sqrt{1 - \sin x - \cos x}] \sin x}{[\cos x - \sqrt{1 - \tg x}] \ln(1+x)}$
143. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x \arctg x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$

145. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \left[\tg(\pi x^2) + (2x-1)4^x + 6x - 4 \right] \cotg \left(x - \frac{1}{2} \right)$

146. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

147. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - (1-x^2)^2} \ln(1+2 \sin x) \arctg \frac{x}{2}}{x - \sin x}$

148. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\ln \cos x}$

150. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{1/x} - 1}{x}$

152. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 - x}{1+x^2} + \cos \sqrt{x} \right]^{2x}$

154. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} + \frac{1}{4} |\sin x| \right)^{3x}$

156. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \tg x} - \frac{1}{x^2} \right]$

158. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$

160. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3 + \sin x)}{x}$

162. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\arctg x - \arccos x^{-2})$

164. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{x}$

166. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\ln(3x+1)]}{e^x - 3^x}$

168. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{1 + \sin^2 x} - 1}{\left\{ (1 + \sin x)^{-1/x} - e^{-1} \right\} \ln \left(1 + \sqrt{1 - e^{-x^2}} \right)}$

169. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arctg x + \sin^2 x(1 - \cos 2x)}{27x^4 + 5 \sin x}$
144. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$

149. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sinh x - \sin x)^2}{(\cosh x - \cos x)^3}$

151. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x - \arctg x}{x^2} \right]^{\ln x}$

153. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5x \sin \frac{1}{x} + \cos x \right)^x$

155. $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2 \cotg x + \sin x]^{1/\ln x}$

157. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2^{1/x} + 3^{1/x} + 5^{1/x}}{3} \right]^x$

159. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\cos x}}{x^{2/3}}$

161. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\arctg x - \arccos x^{-2})$

163. $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\sin x|^{2x}$

165. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \arctg[3(x-x^2)]}{\sinh x - x \cosh x}$

167. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\sqrt{x}}$

170. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \tg x + 5x}{2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}$

171. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)^3}{\sin 5x + \sqrt[3]{x^4} \sin x}$

173. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x \cos x) - \sin(\sinh x)}{(e^x - 4x)^2}$

175. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{\arctg x^2}$

177. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$

179. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{3x + \ln x}$

181. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1 + \arctg x)^{1/x}}{x}$

183. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{ \ln x \}^{(-1)^{[x]}/x}$

185. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x - \cos x}{\tg x + x^3}$

187. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x + \sqrt{x}}$

189. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \ln(2x^2 + x - 3) - \ln(x^2 + 1) \right\}$

191. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctg x)^{(1 - \sin x)/(x^2 + 2x)}$

193. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x + \cos x)^{1/x}$

195. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + \cos x)^{1/x}$

197. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x^3 + x)^{\cotg x}$

199. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - x^2} - 2 \cos x}{x^2}$

201. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \arctg x}{x^2} \right)^{1/\ln x}$

203. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x \cos x - \cos x - \sin x}{(x - \pi/2)^2}$

205. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

172. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ (\sin x)^{-1/x^2} - x^{-1/x^2} \right\}$

174. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 2^x) \tg x}{\cos 2x - 1}$

176. $\lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \arcsin(e^x - 1)]^{1/\sin x}$

178. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$

180. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tg x)^{\sqrt{\cos x}}$

182. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}{\ln \sin 2x}$

184. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1 + \cos x)$

186. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{1 - 4^x}$

188. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arccos x}$

190. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\tg \pi x}$

192. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(7 - \frac{3x \sin x}{1 - \cos x} \right)^{1/x^2}$

194. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x + \cos x)^{(2+x)/x^2}$

196. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4 \tg x + \cos x)^{1/x}$

198. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{3\sqrt{x^2+1} + \ln x}$

200. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1-x^2} + x) - x}{x^2}$

202. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cosh x}{x^4}$

204. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{3}{4}x}$

10.1. Si calcolino le derivate seconde e terze delle funzioni che seguono:

- | | | | |
|-----------------|---------------------|-----------------------|------------------|
| 1. x^2 | 4. $\sin x^2$ | 6. $\frac{x}{\log x}$ | 8. $\sqrt{1+x}$ |
| 2. $x^2 \sin x$ | 5. $x^3 - \sin^2 x$ | 7. $\log \sin x$ | 9. $\log(x+x^2)$ |
| 3. $e^x \cos x$ | | | |

10.2. Dire se il punto 0 è un punto di massimo o di minimo relativo per le seguenti funzioni:

- | | | | |
|-----------------|--------------------|--------------|--------------------------|
| 1. $x \sin^2 x$ | 2. $x^3 \log(1-x)$ | 3. $x^4 e^x$ | 4. $\frac{1-x^4}{1+x^2}$ |
|-----------------|--------------------|--------------|--------------------------|

10.3. Determinare gli intervalli di convessità, di concavità e i punti di flesso delle seguenti funzioni:

- | | | | | |
|-----------------|---------------------|---------------|----------------------|------------------------|
| 1. $x^3 - 3x^2$ | 2. $x^4 - 2x^2 + 1$ | 3. $x \log x$ | 4. $(x^2 + x)e^{-x}$ | 5. $\frac{1}{x^2 + 3}$ |
|-----------------|---------------------|---------------|----------------------|------------------------|

257. Dimostrare che, se $f(x)$ e $g(x)$ sono convesse in (a, b) , lo sono anche le funzioni $f(x) + g(x)$ e $f(x) \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

Dire per quali valori di α sono convesse in $\mathbb{R}$ le funzioni

- 258*.** $e^x + \alpha x^3$ **259.** $e^{\alpha x} - (1 + \alpha)x^2$.

260*. Dimostrare che, se $f(x)$ è convessa in (a, b) e se $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, la funzione $f(x)$ è lipschitziana in $[\alpha, \beta]$, cioè che esiste una costante M tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [\alpha, \beta].$$

10.12. Trovare un polinomio di terzo grado $P(x)$ che verifichi le relazioni $P(1) = 0$, $P'(1) = 2$, $P''(1) = 0$, $P^{(3)}(1) = 1$.

10.13. Trovare un polinomio $P(x)$ di secondo grado, che soddisfi le relazioni $P'(0) = 0$, $P''(0) = 0$, $P^{(3)}(0) = 1$.

10.15. Calcolare i primi quattro termini non nulli dello sviluppo di Taylor delle seguenti funzioni ($x_0 = 0$).

- | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------|
| 1. $\sqrt{1-x-x^2}$ | 2. $\frac{1+x}{1-x}$ | 3. $\arctg(x^2 - x)$ |
|---------------------|----------------------|----------------------|

10.16. Calcolare i limiti seguenti:

- | | |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 + \sin^2 x}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{\log(1-x^2)}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{(1 - \cos x) \log(1+x^2)}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{1 - \sqrt{1-x^3}}$ | |

Trovare lo sviluppo di Taylor delle funzioni seguenti, con punto iniziale $x_0 = 0$:

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|
| 216. $\frac{1}{2-x}$ | 217. $\frac{1}{\sqrt{4-x^3}}$ | 218. $\sin(\pi - x)$ |
| 219. 2^{x-1} | 220. $\arcsin \frac{x}{2}$ | 221. $\ln[(1+x)(1-x)]$ |

Scrivere fino al termine x^5 incluso gli sviluppi delle seguenti funzioni:

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| 222. $\sin^3 x$ | 223. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ | 224. $\sin^2 x - \sin x^2$ |
| 225. $(e^x - 1)^2$ | 226. $\ln(1 + \sin x)$ | 227. $\operatorname{tg} x$ |
| 228. $\frac{1}{1+x+x^2}$ | 229. $\frac{x - \sin x}{x^2}$ | 230. $\arctg(1-x^2)$ |

Calcolare i seguenti limiti:

- | | |
|---|--|
| 236. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2} + x^3 \sin(1/x)}{x^2}$ | 237. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}$ |
| 238. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5^{1+\operatorname{tg}^2 x} - 5)(1 + \sin^5 x)}{1 - \cos x}$ | 239. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5[(e^{x^3})^2 - 1]}{\sqrt{1+x^8} - \sqrt[3]{1+x^8}}$ |

$$\mathbf{240.} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{1 + \sin^2 x} - 1}{\ln \left[1 + \sqrt{1 - e^{-x^2}} \right] \left[(1 + \sin x)^{-1/x} - e^{-1} \right]}$$

- | | |
|---|--|
| 241. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x - \ln \cos x) \ln(1 + \sin x)}{x \sin x \sin 2x}$ | 242. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x)^2 + \ln(1 - \sin^2 x)}{\cosh x^2 - 1}$ |
| 243. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \arctg x + 32x \sin^3 x}{1 - \cos 2x + \sin 4x}$ | 244. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \arctg x - x \sin x}{\arctg x - 1 - \ln(1+x) + \cos x}$ |

$$\mathbf{245.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^4 (\sin x^2 - \sin^2 x)}{1 - \cos x^4}$$

$$\mathbf{246.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 e^{x^3} - \ln(1+x^5)}{[\sqrt{1+x^4} - 1]^2}$$

$$\mathbf{247.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sqrt{1-x^4} - \sqrt{1+x^4}]^2}{x^4 (\sin x^4 - \sin^4 x)}$$

$$\mathbf{248.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x - x^2}{\sqrt{1+x^4} - \cos x^2}$$

$$\mathbf{249.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{(1 - \cos x) \sin x}$$

$$\mathbf{250.} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(1+x^2)^2 - 1} \arctg x \ln(1+2 \sin x)}{x - \sin x}$$

$$\mathbf{251.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x \arctg x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$$

$$\mathbf{252.} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\sinh x) - \cosh(\sin x)}{(e^{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x})^4}$$

$$\mathbf{253.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - \sin^3 x}{x^3 (\cos x^3 - \cos^3 x)}$$

$$\mathbf{254.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) \sin \left(\frac{1}{\ln(2x-1)} \right)$$

$$\mathbf{255.} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \cos 2x)}{\ln \operatorname{tg} 2x}$$

$$\mathbf{256.} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}}{\ln[\ln(e+x^2)]}$$