

$$8.1. P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

$$8.2. 4g$$

8.3.

$$1. 3$$

$$2. 2x - 1$$

$$3. 7x^6$$

$$4. \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$8.4. 0, \frac{3}{4}, 12$$

$$8.5. \frac{\pi}{3}$$

8.6. Togliendo e aggiungendo $af(a)$ al numeratore, si ha

$$\frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = \frac{(x - a)f(a) - a(f(x) - f(a))}{x - a} = f(a) - a \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e la tesi segue passando al limite.

8.7. Si ha

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(-x) - f(-a)}{x - a} = - \frac{f(-x) - f(-a)}{-x - (-a)}.$$

Quando $x \rightarrow a$, $-x \rightarrow -a$, e passando al limite nella relazione precedente si trova

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = - \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(-x) - f(-a)}{-x - (-a)} = -f'(-a).$$

8.8.

$$1. \frac{2x^2 + x + 1}{x^2(x + 2)^2}$$

$$12. 2^{x \sin x} (\sin x + x \cos x) \log 2$$

$$2. x^x (\log x + 1)$$

$$13. -(1 - 3x)^{-\frac{2}{3}} - 1$$

$$3. x^{2e-x} \cos x^{2e-x} \left(\frac{2e-x}{x} - \log x \right)$$

$$14. \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$4. \frac{1}{\log \sin x} \cotg x$$

$$15. \frac{2x - \cos x}{x^2 - \sin x}$$

$$5. \cos x \arccos x - \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$16. \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$6. \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$17. 2|x|$$

$$7. \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$18. -\frac{1}{x(\log x)^2}$$

$$8. -\frac{\log 2}{x(\log x)^2}$$

$$19. -x^{-\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x \right)$$

$$9. \frac{1 - \cos x}{\sqrt{1 - (x - \sin x)^2}}$$

$$20. \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$

$$10. \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$21. \frac{2-2x}{1+(2x-x^2)^2}$$

$$11. (x + \arctg x)^x \log(x + \arctg x) + \frac{x}{x + \arctg x} \left(1 + \frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$8.9. P_0 = \left(-\frac{1}{2}, 2 \right)$$

$$8.10. \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{3\pi}{4} \right)^2$$

$$8.11. y = (2\sqrt{3} - 4)x, y = -(2\sqrt{3} + 4)x$$

$$8.12. \frac{1}{8}$$

8.13.

$$1. M = \sqrt{2} \left[3 \frac{\pi}{4} \right]; \quad m = -\sqrt{2} \left[\frac{7\pi}{4} \right]$$

$$2. M = \frac{1}{2} [1]; \quad m = -\frac{1}{2} [-1]$$

$$3. M = 2 \log 2 [2]; \quad m = -\frac{1}{e} \left[\frac{1}{e} \right]$$

$$4. M = 3 [3]; \quad m = 0 [0; 2]$$

$$5. M = \frac{e^2}{2} [2]; \quad m = e [1]$$

$$6. M = 2 [0]; \quad m = -\sqrt{13} \left[\arctg \left(-\frac{3}{2} \right) \right]$$

$$7. M = \frac{15\sqrt{15}}{8} \left[\arccos \frac{1}{4} \right]; \quad m = 0 [0]$$

$$8. M = 4 [0]; \quad m = \frac{7}{4} + 2 \log 2 [-\log 2]$$

$$9. M = \sqrt{2} \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]; \quad m = 1 \left[0; \frac{\pi}{2}; \pi \right]$$

$$10. M = 3 \log 2 - 1 [-1]; \quad m = 3 \log 5 - 8 [-2]$$

$$11. M = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{2} \right]; \quad m = -\frac{\pi}{2} \left[-\frac{\pi}{2} \right]$$

$$12. M = \arctg \frac{1}{2} - \log \frac{5}{4} \left[\frac{1}{2} \right]; \quad m = 3 [1]$$

8.14.

1. Non c'è massimo; $m = 3$ [1]
2. $M = \frac{1}{2}$ [1]; $m = -\frac{1}{2}$ [-1]
3. Non c'è massimo; $m = 0$ [0]
4. $M = n^n e^{-n}$ [n]; $m = 0$ [0]
5. Non c'è né massimo né minimo
6. $M = -1 - \log 2 \left[\frac{\pi}{6} \right]$; non c'è minimo
7. $M = 6e^{-1}$ [3]; $m = -e$ [1]
8. $M = \frac{8}{e^4}$ [4]; non c'è minimo
9. $M = \frac{1}{e}$ [1]; $m = -1$ [0]
10. $M = 4$ [2]; non c'è minimo
11. $M = 5 \log 5 + 15$ [5]; $m = -\frac{1}{e^4} \left[\frac{1}{e^4} \right]$
12. $M = 1$ [0]; $m = -\frac{\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}$ [1 + $\sqrt{2}$]

8.15. 3 e 5

8.16. $\sqrt[3]{4V}$

8.17. $\sigma_{max} = 2\pi$; $S_{max} = \pi(1 + \sqrt{5})$

8.18. $A_{max} = 2ab$

8.19. $V_{max} = \frac{32\pi}{81}$; $\sigma_{max} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$; $S_{max} = \pi \frac{107 + 51\sqrt{17}}{128}$

8.20. Sia $2p$ il perimetro, b la base, x uno dei lati, e $2p - b - x$ l'altro. Dalla formula di Erone si ha $A = \sqrt{p(p-b)} \sqrt{(p-x)(b+x-p)}$. Questa quantità è massima quando $x = p - \frac{b}{2}$, nel qual caso si ha $2p - b - x = x$ e il triangolo è isoscele.

8.21. Il quadrato.

8.22. $A_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; $P_{max} = 3\sqrt{3}$ (in entrambi i casi il triangolo è equilatero); non c'è perimetro minimo.

8.23. $\frac{p^2}{8 + 2\pi}$

8.24. $r = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$

8.25. Non c'è massimo; $m = \frac{S}{\sqrt{2}}$ (triangolo isoscele).

8.26. $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $b = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

8.27. L'angolo φ del settore è $2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$; il volume del cono $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

8.28. $C_{max} = \frac{L^2}{2\pi}$ [$l = 0$]

8.29. $h = 2$, $r = \sqrt{2}$

8.30. Se $\frac{v_2^2}{v_1^2} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2}$ il tempo minimo si ha andando direttamente da A a B; altrimenti si ha $x_0 = a - \frac{bv_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$, e $T_{min} = \frac{b\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_1 v_2} + \frac{a}{v_1}$.

8.31.

1. 1 [M]; 2 [m]
2. Nessun massimo o minimo relativo; la funzione è crescente
3. $\frac{3}{4}$ [M]; nessun minimo relativo
4. $\frac{1}{3}$ [M]; 1 [m]
5. Nessun massimo relativo; $\sqrt{2} e - \sqrt{2}$ [m]
6. Nessun massimo relativo; 0 [m]
7. Nessun massimo né minimo relativo; la funzione è crescente
8. -1 [M]; nessun minimo relativo
9. Nessun massimo relativo; 2 [m]
10. 0 [M]; -2 e 2 [m]
11. $\frac{1}{2}$ [M]; 2 [m]

$$1. \mathbb{R}; f'(x) = \frac{3}{2} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{|x|}^1$$

$$2. \mathbb{R} - \{0\}; 1 + \operatorname{sgn}(x)$$

$$3. \mathbb{R}; \sin x \quad 4. \mathbb{R}; \sin x + x \cos x$$

$$5. \mathbb{R}; 2x + 3 \quad 6. \mathbb{R}; \cos(\sin x) \cos x$$

$$7. \mathbb{R} - \{0\}; f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x > 0 \\ 3x^2 - \cos x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$8. \mathbb{R}; f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

¹ Si chiama *segno* di x la funzione $\operatorname{sgn}(x)$, che vale -1 per $x < 0$, 0 per $x = 0$, e 1 per $x > 0$.

9. Si ha $f(x) = g(x)$ per $x \in A$, e dunque $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$. Ne segue che se $f(x)$ è derivabile in x_0 lo è anche $g(x)$, e le derivate coincidono. Se A non è aperto, l'esistenza della derivata $f'(x)$ non implica quella di $g'(x)$. Ad esempio, le funzioni 0 e $\max\{x, 0\}$ coincidono per $x \leq 0$, ma la seconda non è derivabile in 0 . Peraltro, anche quando $g'(x)$ esiste, non è detto che sia uguale a $f'(x)$, come si vede dalle funzioni 0 e x , che coincidono per $x = 0$, mentre le derivate sono evidentemente diverse. Si veda comunque l'esercizio seguente.

10. Per ipotesi, esistono ambedue i limiti $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e $g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$. Sia ora $\{x_n\}$ una successione a valori in B , convergente a x_0 . Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 , e dunque si ha $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$, e inoltre

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} = g'(x_0).$$

11. Si può prendere ad esempio $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Si ha $f'(0) = 0$, e $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, che non ha limite per $x \rightarrow 0$.

$$21. 2^{x \sin x} (\sin x + x \cos x) \ln 2$$

$$22. \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x - x}} \frac{1 - \cos x - x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$23. -2 \left(x + \frac{1+x^2}{\sqrt{2+x^2}} \right)$$

$$24. -x(1-3x)^{-2/3} - 1$$

$$25. -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$26. 2x \operatorname{sgn}(x)$$

$$27. -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

$$28. -\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right)$$

$$29. \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$30. \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$31. \frac{2(1-x)}{1+(2x-x^2)^2}$$

$$32. 4x^3 - 4^x \ln 4$$

$$12. \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2(x+2)^2}$$

$$13. x^x(1 + \ln x)$$

$$14. x^{2e-x} \left(\frac{2e-x}{x} - \ln x \right) \cos x^{2e-x}$$

$$15. \frac{1}{\ln \sin x} \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$16. \cos x \arccos x - \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$17. -\frac{\ln 2}{x(\ln x)^2}$$

$$18. \frac{1 - \cos x}{\sqrt{1 - (x - \sin x)^2}}$$

$$19. 2 \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$20. (x + \arctg x)^x \left\{ \ln(x + \arctg x) + \frac{x}{x + \arctg x} \left(1 + \frac{1}{1+x^2} \right) \right\}$$

51. Massimo = $\sqrt{2}$ [nel punto $\frac{3\pi}{4}$]; minimo = $-\sqrt{2}$ [nel punto $\frac{7\pi}{4}$]
52. $M = \frac{1}{2}$ [1]; $m = -\frac{1}{2}$ [-1]
53. $m = -\frac{1}{2} \ln 2 \left[\frac{1}{2} \right]$; $M = 2 \ln 2$ [2]
54. $M = 3$ [3]; $m = 0$ [0, 2]
55. $M = \frac{e^2}{2}$ [2]; $m = e$ [1]
56. $M = e^n$ [e]. Se k è pari, $m = 0$ [1]; se k è dispari e $\geq n$, $m = -e^{-n}$ [1/e]; se k è dispari e $< n$, $m = -\left(\frac{k}{en}\right)^k [e^{-k/n}]$.
57. Se $a > 0$ e $b > 0$, $m = 3\left(\frac{ab^2}{4}\right)^{1/3} \left[\left(\frac{b}{2a}\right)^{1/3}\right]$, sup = $+\infty$; se $a < 0$ e $b < 0$, $M = 3\left(\frac{ab^2}{4}\right)^{1/3} \left[\left(\frac{b}{2a}\right)^{1/3}\right]$, inf = $-\infty$; se $ab < 0$, sup = $+\infty$, inf = $-\infty$.
58. $m = -\frac{1}{2}$ [-1]; $M = \frac{1}{2}$ [1]
59. $m = 0$ [0]; sup = 1
60. Se $n > 0$, $m = 0$ [0]; $M = n^n e^{-n}$ [n]. Se $n = 0$, $M = 1$ [0], inf = 0
61. $M = 2$ [0]; $m = -\sqrt{13} \left[\arctg \left(-\frac{3}{2} \right) \right]$
62. $M = \frac{15\sqrt{15}}{8} \left[\arccos \frac{1}{4} \right]$; $m = 0$ [0]
63. inf = $-\infty$; sup = $+\infty$
64. inf = $-\infty$; $M = -1 - \ln 2 \left[\frac{\pi}{6} \right]$
65. $M = 0$ [$x \in [-3\pi, -2\pi] \cup [-\pi, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]$]; $m = -2 \left[\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \right]$
66. $M = 4$ [0]; $m = \frac{7}{4} + 2 \ln 2$ [-ln 2]
67. $M = 6e^{-1}$ [3]; $m = -e$ [1]
68. $M = \sqrt{2} \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$; $m = 1 \left[0, \frac{\pi}{2}, \pi \right]$
69. $M = 8e^{-4}$ [4]; inf = 0
70. $M = e^{-1}$ [1]; $m = -1$ [0]
71. $M = 4$ [2]; inf = $-\infty$
72. sup = $+\infty$; $m = \frac{p+q}{p} \left(\frac{q}{p} \right)^{-q/(p+q)} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^{1/(p+q)} \right]$
73. $M = \frac{5}{4} \left[\frac{1}{2} \right]$; $m = -\frac{\pi}{6}$ [-1]
74. $m = -e^{-4}$ [e^{-4}]; $M = 5 \ln 5 + 15$ [5]
75. $m = 3 \ln 5 - 8$ [-2]; $M = 3 \ln 2 - 1$ [-1]
76. $m = -1$ [$-\pi, \pi$]; $M = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{2} \right]$

77. $m = \frac{\pi}{4} - \ln 2$ [1]; $M = \arctg \frac{1}{2} - \ln \frac{5}{4} \left[\frac{1}{2} \right]$

78. $l = \sqrt[3]{4V}$

79. (a) $\sigma_{\max} = 2\pi$; (b) $S_{\max} = \pi(1 + \sqrt{5})$

80. $2ab$; i lati sono $a\sqrt{2}$ e $b\sqrt{2}$

81. (a) $V_{\max} = \frac{4\pi ab^2}{3\sqrt{3}}$; (b) $\sigma_{\max} = 2\pi ab$; (c) $S_{\max} = \pi b(b + \sqrt{4a^2 + b^2})$

82. (a) $V_{\max} = \frac{32\pi}{81}$; (b) $\sigma_{\max} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$; (c) $S_{\max} = \pi \frac{107 + 51\sqrt{17}}{128}$

83. (a) $V_{\min} = \frac{8}{3}\pi$; (b) $\sigma_{\min} = \pi(3 + 2\sqrt{2})$; (c) $S_{\min} = 8\pi$

84. In ambedue i casi le rette sono quelle di equazione $y = \pm x$. L'area minima è 2, la somma delle lunghezze $2\sqrt{2}$.

85. Il vertice sta su un'ellisse, e il segmento che unisce i due fuochi di questa è la base. È chiaro che l'altezza (e dunque l'area) è massima quando il vertice sta sul semiasse, e dunque quando il triangolo è isoscele. Per trovare analiticamente lo stesso risultato si può usare la formula di Erone.

86. Il quadrato

87. (a) $A_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; (b) $P_{\max} = 3\sqrt{3}$ (in ambedue i casi il triangolo è equilatero); (c) inf $P = 4$

88. $\frac{P^2}{2(4 + \pi)}$

89. $r = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$

90. $m = \frac{S}{\sqrt{2}}$ (è il triangolo isoscele); sup = S

91. $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $b = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

92. Detto φ l'angolo del settore, si ha $\varphi = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$ e $V = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

93. Se $mg \geq k$, $P = (0, 0)$ ed $E_{\min} = k$; se $mg < k$, $y = \frac{k - mg}{2k}$ ed $E_{\min} = \frac{(k + mg)(3k - mg)}{4k}$.

94. $x = \min \left\{ L, \frac{h}{\sqrt{3}} \right\}$; il tempo minimo è $t = \frac{L + \sqrt{3}h}{\sqrt{2gh}}$ se $h \leq \sqrt{3}L$, $t = 2\sqrt{\frac{h^2 + L^2}{2gh}}$ se $h > \sqrt{3}L$.

95. Dette M , μ ed m le masse delle tre sfere, se v è la velocità della prima, la velocità massima della terza si ha per $\mu = \sqrt{mM} \left(v_{\max} = \frac{4Mv}{M + m + 2\mu} \right)$.

96. Si ha capacità massima $C_{\max} = \frac{L^2}{2\pi}$ quando la base ha lunghezza 0 (cioè quando la grondaia ha la forma di una semicirconferenza).

97. Se $\frac{v_2^2}{v_1^2} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2}$, il tempo minimo si ha andando direttamente da A a B ; altrimenti, il punto di distacco ha ascissa

$$x_0 = a - \frac{bv_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}},$$

e il tempo minimo è

$$T_{\min} = \frac{b\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_1 v_2} + \frac{a}{v_1}.$$

111. 1 [M]; 2 [m] 112. Nessun massimo o minimo relativo

113. 1 [m]; $\frac{1}{3}$ [M] 114. $\frac{3}{4}$ [m]; nessun massimo relativo

115. (a) k pari, n pari: 0 [m]; 1 [m]; $\frac{k}{k+n}$ [M]

(b) k pari, n dispari: 0 [M]; $\frac{k}{k+n}$ [m]

(c) k dispari, n pari: 1 [m]; $\frac{k}{k+n}$ [M]

(d) k dispari, n dispari: $\frac{k}{k+n}$ [m]

116. -1 [m]

117. $\sqrt{2}$ [m]; $-\sqrt{2}$ [m]

118. Se n è pari, 0 è un punto di minimo relativo

119. 2 [m]

120. $\frac{2k+1}{3}\pi$ [M]; $\frac{6k+1}{9}\pi$ [m] ($k \in \mathbb{Z}$)

121. (a) k pari, h pari: -1 [m]; 1 [m]; $\frac{-k}{k+h}$ [M]

(b) k pari, h dispari: 1 [m]; $\frac{-k}{k+h}$ [M]

(c) k dispari, h pari: $\frac{-k}{k+h}$ [m]

(d) k dispari, h dispari: -1 [m]; $\frac{-k}{k+h}$ [M]

122. 0 [M]; -2 [m]; 2 [m]

123. Se $a^2 > 3b$: $\frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$ [M]; $\frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$ [m]

124. $\frac{1}{2}$ [M]; 2 [m]

125. Si ha $f'(a) \leq 0$ [≥ 0]. Infatti in un intervallo $(a, a+\epsilon)$ risulta $f(x) \leq f(a)$, cosicché $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ e, passando al limite, $f'(a) \leq 0$. Analogamente, se $f(x)$ ha un massimo (un minimo) relativo nel punto b , risulta $f'(b) \geq 0$ [≤ 0].

8.32. Se c'è un intervallo (x_1, x_2) in cui $f' \equiv 0$, f è costante in (x_1, x_2) , e quindi non è strettamente crescente. Viceversa se f non è strettamente crescente, allora esistono due punti $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Essendo crescente, f sarà allora costante in (x_1, x_2) , e quindi $f' = 0$.

8.34. 1. $\frac{1}{2}$ 6. e^a 11. $+\infty$ 16. $\frac{1}{3}$
 2. $-\frac{1}{2}$ 7. 1 12. 1 17. $\log 3 - \log 2$
 3. 1 8. $-\infty$ 13. $-\frac{1}{3}$ 18. 0
 4. $-\frac{1}{2}$ 9. 1 14. 0 19. 1
 5. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 10. $-\frac{1}{6}$ 15. 1 20. e

8.35. 1. $a = \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ 2. $a = \frac{3}{4}$

33. Una funzione $f(x)$ è crescente in (a, b) se e solo se $f'(x) \geq 0$. D'altra parte, $f'(x) \equiv 0$ in (α, β) se e solo se $f(x)$ è costante in (α, β) . Ne segue che una funzione f è strettamente crescente in (a, b) se e solo se $f'(x) \geq 0$ e f' non si annulla in nessun intervallo contenuto in (a, b) .

34. La derivata prima $f'(x) = \ln x + 1$ si annulla solo per $x = e^{-1}$ ed è positiva per $x > e^{-1}$, negativa per $0 < x < e^{-1}$. Poiché $\frac{1}{2} > e^{-1}$, $f(x)$ è crescente, e dunque invertibile, in $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Detta $g(x)$ la sua inversa, si ha $g(0) = 1$, e dunque $g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = 1$.

Per trovare la derivata seconda, si deriva la formula $g'(x) = 1/f'(g(x))$:

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))g'(x)}{[f'(g(x))]^2},$$

e dunque $g''(0) = -1$.

35. Sia $f(x) = x^{2n+1} + x + 1$. Risulta $f(-1) = -1 < 0$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} > 0$, e quindi l'equazione $f(x) = 0$ ha una radice x_n compresa tra -1 e $-\frac{1}{2}$. D'altra parte $f'(x) = (2n+1)x^{2n} + 1 > 0$, e dunque la funzione $f(x)$ è strettamente crescente, per cui non si può annullare due volte. La radice x_n è pertanto unica. Infine, per dimostrare che $x_n \rightarrow -1$, sia $\epsilon > 0$. Si ha $f(-1+\epsilon) = -(1-\epsilon)^{2n+1} + \epsilon$; dato che $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-\epsilon)^{2n+1} = 0$, esisterà un ν tale che per ogni $n > \nu$ risulta $(1-\epsilon)^{2n+1} < \epsilon$. Per questi n si ha allora $f(-1+\epsilon) > 0$, e dato che $f(-1) < 0$, risulta $-1 < x_n < -1 + \epsilon$, e quindi $x_n \rightarrow -1$.

126. Supponiamo che sia $F'(\alpha) < 0$ e $F'(\beta) > 0$. Per l'esercizio precedente, la funzione $F(x)$ (ristretta all'intervallo $[\alpha, \beta]$) non può avere un minimo né in α né in β ; ne segue che essa ha minimo in un punto interno ξ , nel quale $F'(\xi) = 0$. Allo stesso modo, ovvero cambiando di segno la funzione $F(x)$, si dimostra che, se $F'(\alpha) > 0$ e $F'(\beta) < 0$, esiste un punto $\xi \in (\alpha, \beta)$ in cui $F'(\xi) = 0$. In generale, se λ è un valore compreso tra $F'(\alpha)$ e $F'(\beta)$, ci si riconduce al caso precedente ponendo $G(x) = F(x) - \lambda x$.