

8.1. Trovare un punto P_0 sulla parabola $y = x^2$ in modo che la tangente in P_0 faccia un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse delle ascisse.

8.2. Un corpo in caduta libera percorre nel tempo t uno spazio $s = \frac{1}{2}gt^2$. Calcolare la velocità al tempo $t = 4$.

8.3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $3x - 2$ 2. $x^2 - x$ 3. $x^7 + 1$ 4. $\sqrt{x}$

8.4. Sia $f(x) = x^3$. Calcolare $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(-2)$.

8.5. Sia $f(x) = \sin x$. Trovare un punto x_0 tale che $f'(x_0) = \frac{1}{2}$.

8.6. Dimostrare che se la funzione f è derivabile in a , allora

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

8.7. Dimostrare che la derivata di una funzione pari è una funzione dispari.

8.8. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $\frac{x^2 - 1}{x(x+2)}$	4. $\log \log \sin x $	7. $\log(x + \sqrt{1+x^2})$
2. x^x	5. $\sin x \arccos x$	8. $\log_x 2x$
3. $\sin x^{2e-x}$	6. $\sqrt{1+x^2}$	9. $\arcsin(x - \sin x)$
10. $x\sqrt{1+x^2}$	14. $\arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	18. $\frac{1}{\log x}$
11. $(x + \arctg x)^x$	15. $\log(x^2 - \sin x)$	19. $x^{-\sin x}$
12. $2^{x \sin x}$	16. $\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	20. $\sqrt{1+x^3}$
13. $\sqrt[3]{1-3x} - x$	17. $x^2 \operatorname{segno}(x)$	21. $\arctg(2x - x^2)$

8.9. Trovare un punto P_0 sull'iperbole $y = \frac{1}{1+x}$ in modo che la tangente in P_0 passi per l'origine.

8.10. Trovare l'area del triangolo formato dagli assi e dalla tangente alla curva $y = \sin x$ nel punto $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

8.11. Trovare l'equazione delle tangenti alla parabola $y = x^2 - 4x + 3$, che passano per l'origine.

8.12. Trovare l'area del triangolo che ha come vertici i punti in comune delle parabole $y = x^2$ e $y = x - x^2$, e l'intersezione con l'asse delle ascisse della tangente alla parabola $2y = x^2$ nel punto $(-2, 2)$.

8.13. Trovare il massimo M e il minimo m assoluti (e i punti di massimo e di minimo assoluto) delle funzioni seguenti, negli intervalli indicati a fianco di ognuna di esse:

1. $\sin x - \cos x$ $[0, 2\pi]$	3. $x \log x$ $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$
2. $\frac{x}{1+x^2}$ $[-2, 3]$	4. $x(x-2)^2$ $[0, 3]$
5. $\frac{e^x}{x}$ $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$	9. $\sin x + \cos x $ $[0, \pi]$
6. $2 \cos x - 3 \sin x$ $[0, \pi]$	10. $3 \log(1+x^2) + x^3$ $[-2, 0]$
7. $7 \sin x + \sin 2x$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	11. $ x \sin x + \cos x$ $[-\pi, \pi]$
8. $e^{2x} + 3e^x - 2x$ $[-1, 0]$	12. $\arctg x - \log(1+x^2)$ $[0, 1]$

8.14. Trovare, se esistono, il massimo M e il minimo m assoluti (e i punti di massimo e di minimo assoluto) delle funzioni seguenti, negli intervalli indicati a fianco di ognuna di esse:

1. $x^2 + \frac{2}{x}$ $(0, +\infty)$	7. $(x^2 - 3)e^{2-x}$ $[1, +\infty)$
2. $\frac{x}{1+x^2}$ $(-\infty, +\infty)$	8. $(x^2 - 8)e^{-x}$ $[3, +\infty)$
3. $\frac{x^2}{x^2 + 1}$ $(-\infty, +\infty)$	9. $(2x - 1)e^{-x^2}$ $[0, +\infty)$
4. $x^n e^{-x}$, $(n > 0)$ $[0, +\infty)$	10. $2x e^{1-\frac{x}{2}}$ $(-\infty, +\infty)$
5. $x - \arctg x$ $(-\infty, +\infty)$	11. $x \log x + 3x$ $(0, 5]$
6. $\log \sin x - 2 \sin x$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$	12. $\frac{1-x}{1+x^2}$ $[0, +\infty)$

8.15. Dividere 8 in due parti in modo che la somma dei loro cubi sia minima.

8.16. Il volume di un prisma retto, la cui base è un triangolo equilatero, è V . Trovare il lato della base in modo che la superficie totale sia minima.

8.17. Tra tutti i cilindri iscritti alla sfera di raggio 1, trovare:

- quello di superficie laterale σ massima,
- quello di superficie totale S massima.

8.18. Tra tutti i rettangoli con i vertici su un'ellisse di semiassi a e b trovare quello di area massima.

8.19. Tra i coni iscritti alla sfera di raggio 1, trovare quello

- di volume V massimo,
- di superficie laterale σ massima,
- di superficie totale S massima.

8.20. Dimostrare che un triangolo di cui siano dati la base e il perimetro ha area massima se è isoscele.

8.21. Tra tutti i rettangoli di data area trovare quello di diagonale minima.

8.22. Tra tutti i triangoli isosceli iscritti nel cerchio di raggio 1, trovare quello

- di area massima,
- di perimetro massimo,
- di perimetro minimo.

8.23. Una figura è costituita da un rettangolo sormontato da un semicerchio. Se il perimetro P della figura è assegnato, trovare l'area massima.

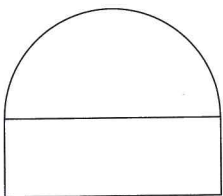


Figura 8.8

8.24. Con un foglio rettangolare di lati a e b si vuole costruire una scatola ritagliando quattro quadrati di lato r agli angoli e ripiegando i lembi (vedi figura). Come si deve scegliere r in modo che il volume sia massimo?

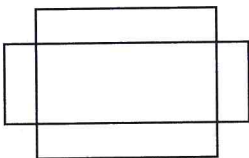


Figura 8.9

8.25. Tra tutti i triangoli rettangoli aventi la somma dei cateti S fissata, trovare (se esistono) quelli di ipotenusa minima e massima.

8.26. Nel cerchio di raggio 1 inscrivere un rettangolo tale che, detto a il suo lato minore e b il maggiore, la quantità ab^2 sia massima.

8.27. Da un cerchio di raggio 1 ritagliare un settore tale che, facendo combaciare i due lati in modo da formare la superficie laterale di un cono, questo abbia volume massimo.

8.28. Una grondaia è costruita piegando la striscia di larghezza L in modo da ricavarne un profilo costituito da una base orizzontale e da due quarti di circonferenza come in figura. Trovare quale deve essere la lunghezza l della base affinché la capacità sia massima.

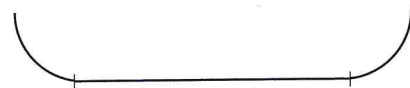


Figura 8.10

8.29. Tra i coni di volume $V = \frac{4\pi}{3}$ trovare quello di superficie laterale minima.

8.30. Si deve andare da un punto A (l'origine degli assi) a un punto B di coordinate (a, b) , percorrendo prima un tratto sull'asse delle x con velocità v_1 e poi un tratto rettilineo fino a B con velocità v_2 . Trovare in quale punto x_0 si deve abbandonare l'asse delle x perché il tempo totale impiegato sia minimo.

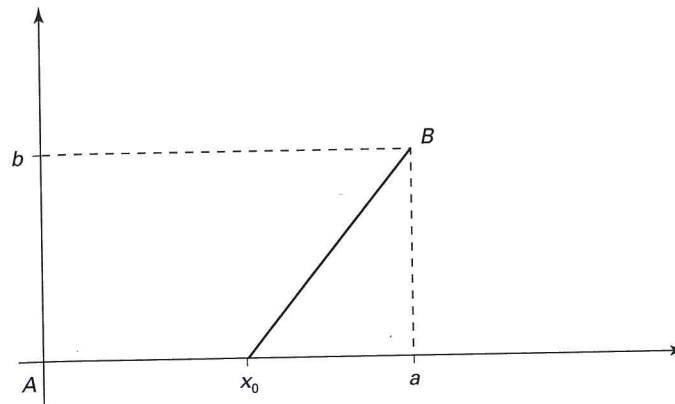


Figura 8.10

8.31. Trovare i punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni:

1. $2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$

2. $x^3 + x^2 + x + 1$

3. $x^3 - x^4$

4. $x(x-1)^2$

5. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

6. $\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\frac{2}{x-x^2}$

9. $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x-1}}$

10. $|x^2-4|^{\frac{5}{3}}$

11. $2 \log x - 5 \operatorname{arctg} x$

Trovare dove sono derivabili le seguenti funzioni, e calcolarne la derivata:

1. $x\sqrt{|x|}$ 2. $x + |x|$ 3. $\cos|x|$ 4. $|x|\sin|x|$

5. $x^2 + 3x - 2$ 6. $\sin(\sin x)$

7. $\begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 0 \\ x^3 - \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

9. Dimostrare che, se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni definite in $\mathbb{R}$ e tali che $f(x) = g(x)$ in un aperto A , allora, se $f(x)$ è derivabile in un punto $x_0 \in A$, anche $g(x)$ è derivabile in x_0 , e risulta $g'(x_0) = f'(x_0)$. Si può dire lo stesso senza supporre che A sia aperto?

10. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in $\mathbb{R}$ e tali che $f(x) = g(x)$ in un insieme $B \subset \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione di B , e si supponga che sia f che g siano derivabili in x_0 . Si dimostri che in tal caso risulta $f'(x_0) = g'(x_0)$.

11*. Trovare una funzione $f(x)$ derivabile nell'intervallo $(-1, 1)$ e tale che $f'(x)$ non sia continua in 0.

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

12. $\frac{x^2 - 1}{x(x + 2)}$ 13. x^x 14. $\sin x^{2e-x}$ 15. $\ln|\ln \sin x|$ 16. $\sin x \arccos x$

17. $\log_x 2x$ 18. $\arcsin(x - \sin x)$ 19. $2x\sqrt{1+x^2}$ 20. $(x + \arctg x)^x$

21. $2^{x \sin x}$ 22. $\sqrt{\frac{\sin x - x}{\cos x}}$ 23. $\frac{x + \sqrt{2+x^2}}{x - \sqrt{2+x^2}}$ 24. $\sqrt[3]{1-3x-x}$

25. $\sin \arccos x$ 26. $x^2 \operatorname{sgn}(x)$ 27. $\frac{1}{\ln x}$ 28. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

29. $\sqrt{1+x^3}$ 30. $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 31. $\arctg(2x - x^2)$ 32. $x^4 - 4^x$

Trovare, se esistono, il massimo M e il minimo m delle seguenti funzioni, negli intervalli indicati a fianco di ognuna di esse:

51. $\sin x - \cos x$ $[0, 2\pi]$ 52. $\frac{x}{1+x^2}$ $[-2, 3]$

53. $x \ln x$ $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 54. $x(x-2)^2$ $[0, 3]$

55. $\frac{e^x}{x}$ $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 56*. $x^n \ln^k x$ $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

57. $ax^2 + \frac{b}{x}$ $(0, +\infty)$ 58. $\frac{x}{1+x^2}$ $(-\infty, +\infty)$

59. $\frac{x^2}{x^2 + 1}$ $(-\infty, +\infty)$ 60. $x^n e^{-x}$ ($n \geq 0$) $[0, +\infty)$

61. $2 \cos x - 3 \sin x$ $[0, \pi]$ 62. $7 \sin x + \sin 2x$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

63. $x - \arctg x$ $(-\infty, +\infty)$ 64. $\ln \sin x - 2 \sin x$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

65. $\sin|x| - |\sin x|$ $[-10, 10]$ 66. $e^{2x} + 3e^x - 2x$ $[-1, 0]$

67. $(x^2 - 3)e^{2-x}$ $[1, +\infty)$ 68. $\sin x + |\cos x|$ $[0, \pi]$

69. $(x^2 - 8)e^{-x}$ $[3, +\infty)$ 70. $(2x - 1)e^{-x^2}$ $[0, +\infty)$

71. $2xe^{1-x/2}$ $(-\infty, +\infty)$ 72. $x^p + x^{-q}$ ($p, q > 0$) $(0, +\infty)$

73. $f(x) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right) & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1+x-x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ $[-1, 1]$

74. $x \ln x + 3x$ $(0, 5]$ 75. $3 \ln(1+x^2) + x^3$ $[-2, 0]$

76. $|x| \sin x + \cos x$ $[-\pi, \pi]$ 77. $\arctg x - \ln(1+x^2)$ $[0, 1]$

78. Il volume di un prisma retto, la cui base è un triangolo equilatero, è V . Trovare il lato della base in modo che la superficie totale sia minima.

79. Fra tutti i cilindri inscritti nella sfera di raggio 1, trovare

- (a) quello di superficie laterale σ massima,
- (b) quello di superficie totale S massima.

80. Fra tutti i rettangoli con i vertici su un'ellisse di semiassi a e b , trovare quello di area massima.

81. Fra tutti i cilindri inscritti in un ellissoide ottenuto ruotando attorno all'asse delle x l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trovare

- (a) quello di volume V massimo,
- (b) quello di superficie laterale σ massima,
- (c) quello di superficie totale S massima.

82. Fra i coni inscritti nella sfera di raggio 1, trovare

- (a) quello di volume V massimo,
- (b) quello di superficie laterale σ massima,
- (c) quello di superficie totale S massima.

83*. Fra i coni circoscritti alla sfera di raggio 1, trovare (se esistono)

- (a) quello di volume V minimo,
- (b) quello di superficie laterale σ minima,
- (c) quello di superficie totale S minima.

84. Nella parabola di equazione $y = x^2$ si tirino dall'origine due rette perpendicolari in modo che

- (a) il rettangolo composto dai segmenti staccati su di esse dalla parabola abbia area minima,
- (b) la somma delle lunghezze dei segmenti sia minima.

85. Dimostrare che un triangolo di cui siano dati la base e il perimetro ha area massima se è isoscele.

86. Fra tutti i rettangoli di data area trovare quello di diagonale minima.

87. Fra tutti i triangoli isosceli inscritti nel cerchio di raggio 1, trovare

- (a) quello di area massima,
- (b) quello di perimetro massimo,
- (c) quello di perimetro minimo.

88. Una figura è costituita da un rettangolo sormontato da un semicerchio (fig. 6.3). Se il perimetro P della figura è assegnato, trovare l'area massima.

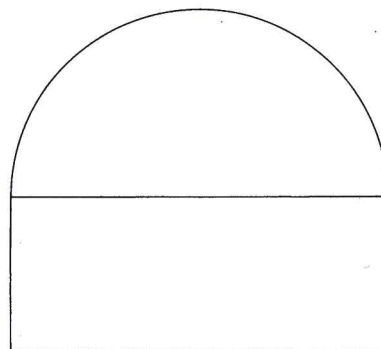


Figura 6.3

89. Con un foglio rettangolare di lati a e b si vuole costruire una scatola ritagliando quattro quadrati di lato r agli angoli e ripiegando i lembi (fig. 6.4). Come si deve scegliere r in modo che il volume sia massimo?

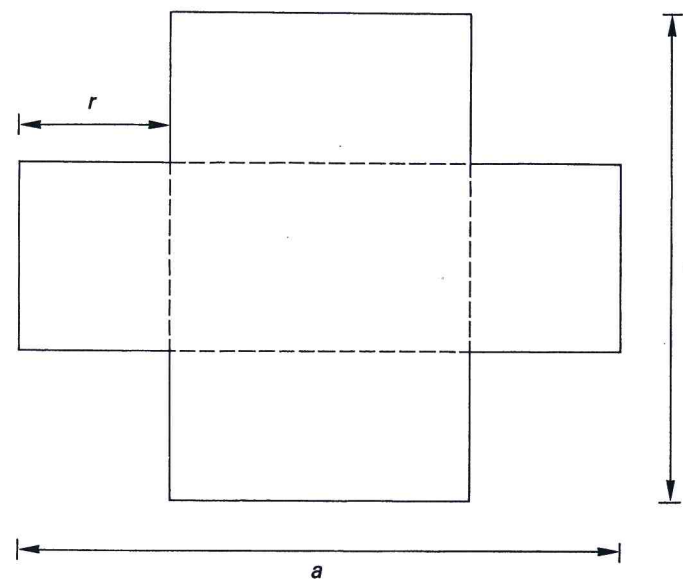


Figura 6.4

90. Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la somma dei cateti S fissata, trovare (se esistono) quelli di ipotenusa minima e massima.

91. Nel cerchio di raggio 1 inscrivere un rettangolo tale che, detti a il suo lato minore e b il maggiore, la quantità ab^2 sia massima.

92. Da un cerchio di raggio 1 ritagliare un settore tale che, facendo combaciare i due lati in modo da formare un cono, questo abbia volume massimo.

93. Un punto materiale di massa m può muoversi sulla parabola di equazione $y = x^2$, ed è unito con una molla di costante k al punto P_0 di coordinate $(0, 1)$ (fig. 6.5). Trovare il punto in cui l'energia totale è minima (si ricordi che l'energia è data dalla somma dell'energia gravitazionale mgy e di quella elastica, che è uguale a k moltiplicato per il quadrato della distanza del punto da P_0).

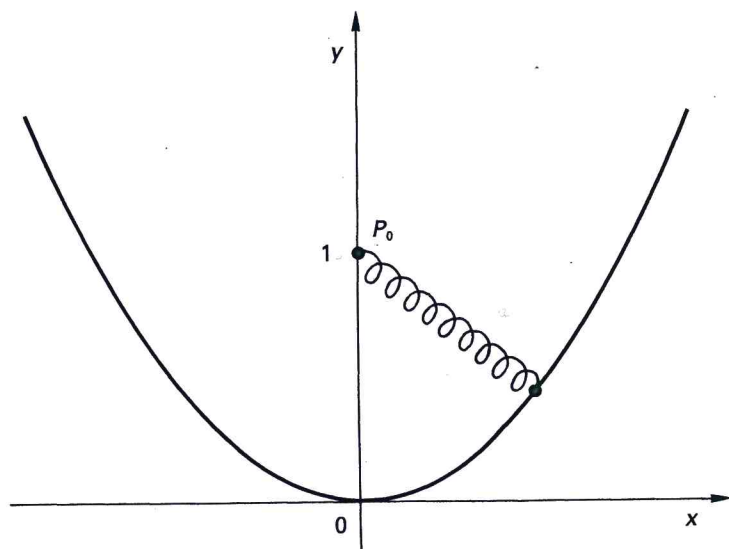


Figura 6.5

94. Un grave cade da A verso P , e poi prosegue fino a B con la velocità acquistata in P (fig. 6.6). Trovare la posizione del punto P sul segmento BC in modo tale che il tempo totale del percorso sia minimo.

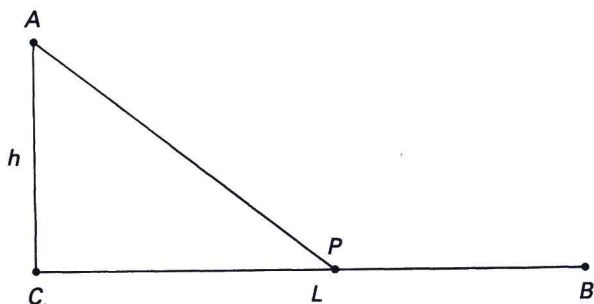


Figura 6.6

95. Tre sfere elastiche sono situate su una retta. La prima sfera si muove con velocità v e urta la seconda, che è in quiete; questa acquista una certa velocità e va a urtare la terza. Se le masse della prima e della terza sfera sono assegnate, trovare quale deve essere la massa della seconda affinché la velocità assunta dalla terza sfera sia massima.

96. Una grondaia è costruita piegando una striscia di larghezza L in modo da ottenere un profilo costituito da una base orizzontale e da due quarti di circonferenza come nella figura 6.7. Trovare quale deve essere la lunghezza della base affinché la capacità sia massima.



Figura 6.7

97. Si deve andare da un punto A (l'origine degli assi) a un punto B di coordinate (a, b) , percorrendo prima un tratto sull'asse delle x con velocità v_1 e poi un tratto rettilineo fino a B con velocità v_2 (fig. 6.8). Trovare in quale punto si deve abbandonare l'asse delle x perché il tempo totale impiegato sia minimo.

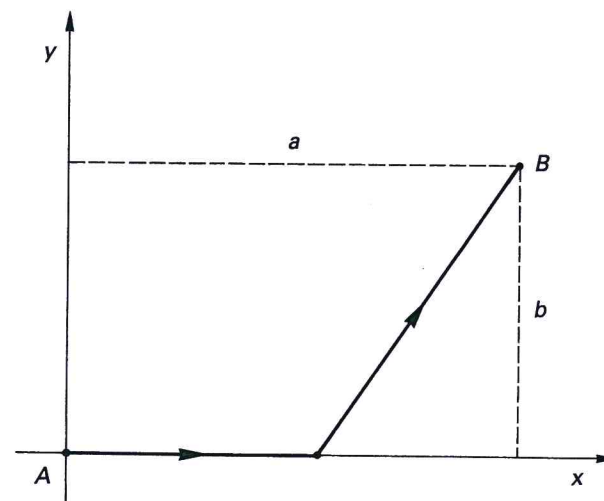


Figura 6.8

Trovare i punti di massimo e di minimo relativi delle seguenti funzioni:

111. $2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ 112. $x^3 + x^2 + x + 1$ 113. $x(x-1)^2$ 114. $x^4 - x^3$

115*. $x^k(x-1)^m$, con k ed m interi > 1 116. $x^2 + x - \frac{1}{x}$

117. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ 118. $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$ 119. $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x-1}}$ 120. $2 \sin 3x + \sin 6x$

121. $(x+1)^k(x^2-1)^k$ 122. $|x^2-4|^{5/3}$ 123. $x^3 + ax^2 + bx + c$ 124. $2 \ln x - 5 \operatorname{arctg} x$

125. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $[a, b]$, e supponiamo che abbia un massimo (un minimo) relativo in a . Cosa si può dire della derivata $f'(a)$? E cosa di $f'(b)$ se $f(x)$ ha un massimo o un minimo relativo in b ?

8.32.* Dimostrare che una funzione derivabile e crescente in un intervallo I è strettamente crescente se e solo se in ogni intervallo $(x_1, x_2) \subset I$ c'è un punto ξ con $f'(\xi) > 0$.

8.34. Si calcolino i limiti seguenti:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} x \log \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x + \sin^2 x}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{1+x}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(3 + \sin x)}{x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} \log 3 - \log 2$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x + \sqrt{x}}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arccos x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

8.35. Dire per quali valori reali di a risulta

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a\sqrt{x^2 + 2x} + (1-a)\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x - a) = -\frac{1}{2}$$

33. Dimostrare che una funzione derivabile $f(x)$ è strettamente crescente in (a, b) se e solo se $f'(x) \geq 0$ in (a, b) e l'insieme E in cui la derivata prima si annulla non contiene nessun intervallo.

34. Dimostrare che la restrizione della funzione $f(x) = x \ln x$ alla semiretta $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ è invertibile. Detta $g(x)$ la sua inversa, trovare $g'(0)$ e $g''(0)$.

35.* Dimostrare che l'equazione $x^{2n+1} + x + 1 = 0$ ha una sola soluzione reale x_n . Trovare, se esiste, il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

126.* Si dice che una funzione $F(x)$ ha la proprietà di Darboux in un intervallo $[a, b]$ se in ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $F(\alpha)$ e $F(\beta)$. Dimostrare che, se $F(x)$ è una funzione derivabile in $[a, b]$, la sua derivata ha la proprietà di Darboux.