

6.6.

1. 1 2. $-\infty$ 3. 1 4. 0 5. 3 6. -1

96. 1, 0 97. $\frac{1}{5}$ 98. 2, 0 99. 0

100. $+\infty, 0$ 101. 1, 0 102. 1 103. $+\infty$

104. $+\infty$ 105. 0 106. $\frac{1}{2}$ 107. $+\infty, -\infty$

108. $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ 109. 1, -1 110. 1, -1 111. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$

112. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

113. $\max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \min \left\{ a_0, \frac{1}{2a_0} \right\}$; $\max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \max \left\{ a_0, \frac{1}{2a_0} \right\}$, e dunque la successione

converge se e solo se $a_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

114. Il limite è $+\infty$ se $a_0 > \frac{1}{2}$, $-\infty$ se $a_0 < -\frac{1}{2}$.

115. Il limite è 5 se $a_0 > 0$, 0 se $a_0 = 0$.

116. Risulta $\max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$ e $\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{3}$.

117. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

118. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } |a_0| < 1 \\ 1 & \text{se } |a_0| = 1 \\ +\infty & \text{se } |a_0| > 1 \end{cases}$

119. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

120. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

121. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } a_0 < -1 \\ -1 & \text{se } a_0 = -1 \\ +\infty & \text{se } a_0 > -1 \end{cases}$

122. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_1 < 1 \\ 1 & \text{se } a_1 = 1 \\ +\infty & \text{se } a_1 > 1 \end{cases}$

123. $+\infty$ 124. 0 125. 1

126. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_0 > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } a_0 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

127. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$

128. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$

129. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

7.1.

1. si 2. no 3. si 4. si 5. si 6. no

7.2.

1. $f(0) = 0$ 2. $f(0) = 3$

3. Comunque si definisca $f(0)$ la funzione non sarà mai continua, dato che non esiste il limite per $x \rightarrow 0$.

4. $f(0) = 1$

5. Comunque si definisca $f(0)$ la funzione non risulterà mai continua, dato che il limite per $x \rightarrow 0$ è $+\infty$.

7.3.

1. Continua
2. Discontinuità di prima specie in 0
3. Continua
4. Discontinuità di seconda specie in 0
5. Discontinuità eliminabile in 0
6. Discontinuità di prima specie in 1
7. Discontinuità di prima specie nei punti 0, ± 1 , ± 2 , ecc.
8. Discontinuità di prima specie nei punti di $\mathbf{Z}$
9. Continua
10. Continua
11. Continua

7.4. Siccome il grado dell'equazione è dispari, per quanto abbiamo visto esiste almeno una soluzione. La soluzione è unica, dato che la funzione $x^3 + x - a$ è strettamente crescente.

7.5. Si ha $f(-2) < -2 + 1 < 0$ e $f(6) > 6 - 5 > 0$; per il teorema dei valori intermedi esisterà almeno un punto ξ compreso tra -2 e 6, tale che $f(\xi) = 0$.

7.6. R

171. Sì, se si pone $f(0) = \frac{\pi}{2}$. 172. No. Infatti risulta $f^+(0) = \frac{\pi}{2}$ e $f^-(0) = -\frac{\pi}{2}$.

173. È discontinua in $\mathbb{Z} - \{0\}$, con discontinuità di seconda specie: $f^+(n) = n^2$, $f^-(n) = n(n-1)$.

174. Sì

175. Esiste un punto $\xi > 0$ in cui il denominatore si annulla (discontinuità di terza specie). In 0 la funzione ha limite -1 , e dunque può essere resa continua assegnandole tale valore.

176. La funzione ha discontinuità di seconda specie in tutti i punti interi ($n \in \mathbb{Z}$), tranne $n = 2$. Si ha $f^+(n) = 1$ e $f^-(n) = n - 1$.

177. La funzione si può rendere continua assegnando il valore 0 ai punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

178. Si può rendere continua cambiando da 0 a 1 il valore che essa assume nei punti $2n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$).

179. Sì 180. Sì

181. (43) Sì (44) Sì (45) Sì (46) Z

(47) Z (48) Z (49) Sì (50) Sì, se si pone $f(n) = 1$.

(51) Sì (52) Z (53) Z (54) Sì, se si pone $f(n) = 1$.

(55) Z (56) $\pm\sqrt{n}$ ($n \neq 0$) (57) Sì (58) $\{0\}$

(59) La funzione è discontinua in 0 ($f^+(0) = 1$, $f^-(0) = 0$), mentre può essere resa continua in 1 cambiando il suo valore da 2 a 1.

182. Sì 183. Discontinuità di seconda specie in $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

184. Sì 185. Sì 186. Sì 187. No

188. Sì 189. Sì 190. No 191. Sì

192. In primo luogo si osserva che $f(x)$ si estende a una funzione uniformemente continua in $[a, b]$ e in $[b, c]$ (teorema di estensione). D'altra parte, risulta $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$, e dunque $f(x)$ è continua in $[a, c]$. Per il teorema di Weierstrass $f(x)$ è uniformemente continua.

193. Si prenda $\epsilon = 1$ nella definizione di uniforme continuità: esisterà un $\delta > 0$ tale che, se $|x_1 - x_2| < \delta$, allora $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$. Siano ora x e x_0 due punti di A , e sia n tale che $n\delta \leq |x - x_0| < (n+1)\delta$. Si possono allora trovare $n+1$ punti $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} = x$ compresi tra x_0 e x e tali che la distanza tra due punti successivi sia minore di δ . Ne segue

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < n+1 \leq \frac{|x - x_0|}{\delta} + 1.$$

194. La funzione $1/x$ non è uniformemente continua in $(0, 1]$, mentre la funzione x^2 non lo è in $[1, +\infty)$ per il risultato dell'esercizio precedente.

195. Fissato $\epsilon > 0$, sia M un numero tale che per $x > M$ risulti $|f(x) - g(x)| < \epsilon$. Sia poi $\delta_1 > 0$ tale che, se $|x_1 - x_2| < \delta_1$, risulti $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Infine, poiché $g(x)$ è uniformemente continua in $[a, M+1]$, esisterà un $\delta_2 > 0$ tale che, se $x_1, x_2 \in [a, M+1]$ e $|x_2 - x_1| < \delta_2$, allora $|g(x_2) - g(x_1)| < \epsilon$. Si ponga $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$, e siano $x, y \in [a, +\infty)$ tali che $|x - y| < \delta$. Per la scelta di δ , i due punti x e y apparterranno ambedue a $[a, M+1]$ oppure saranno ambedue maggiori di M . Nel primo caso risulta $|g(x) - g(y)| < \epsilon$; nel secondo si ha

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| < 3\epsilon.$$

In ogni caso, se $|x - y| < \delta$ si ha $|g(x) - g(y)| < 3\epsilon$, e dunque $g(x)$ è uniformemente continua.

196. Sì 197. Sì 198. No 199. Sì 200. No

201. No 202. Sì 203. No 204. Sì 205. Sì