

6.6. Trovare il limite (se esiste) delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

1. $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2}, \quad a_1 = 3$
2. $a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = -3$
3. $a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \quad a_1 = 2$
4. $a_{n+1} = \sin a_n, \quad a_1 = 2$
5. $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}, \quad a_1 = 4$
6. $a_{n+1} = -\sqrt{2+a_n}, \quad a_1 = 1$

Trovare il massimo e il minimo limite delle successioni seguenti:

96. $[1 + \sin n]$
97. $\frac{n^2 + 3n + 2}{5n^2 - 4}$
98. $1 + (-1)^n$
99. $\sqrt{n^2 - 1} - n$
100. $n^{(-1)^n}$
101. $\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$
102. $\frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}$
103. $n - [\sqrt{n}]$
104. $\frac{1+2+3+\dots+n}{n}$
105. $\frac{n^{2/3} \sin n!}{n+1}$
106. $\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$
107. $\frac{n!}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}$
108. $\arctg(-2)^n$
109. $\sqrt[n]{(-1)^n n}$
110. $\frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{10}$

Studiare il comportamento delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

111. $a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{3a_n + 2}, \quad a_0 > 0$
112. $a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3}, \quad a_0 < -3$
113. $a_{n+1} = \frac{1}{2a_n}, \quad a_0 \neq 0$
114. $a_{n+1} = 7a_n - \frac{1}{a_n}, \quad |a_0| > \frac{1}{2}$
115. $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}, \quad a_0 \geq 0$
116. $a_{n+1} = -\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right), \quad a_0 \neq 0$
117. $a_{n+1} = \sin a_n$
118. $a_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{2}, a_n^2 \right\}$
119. $a_{n+1} = \frac{na_n}{2n+1}$
120. $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1$
121. $a_{n+1} = 2a_n + 1$
122. $a_{n+1} = a_n^n, \quad a_1 > 0.$
123. $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n, \quad a_1 > 0$
124. $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$
125. $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}, \quad a_1 \geq -1$
126. $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \quad a_0 \geq 0.$

Si trovi il $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, dove la successione a_n è definita per ricorrenza da

127. $a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad a_0 > -1$
- 128*. $a_{n+1} = 3a_n - n + 1, \quad a_0 > 0$
- 129*. $a_{n+1} = n(1 + \ln a_n), \quad a_1 = 1.$

7.1. Dire se le seguenti funzioni sono continue in 0:

1. $x + \sin x$
2. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 1-x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x > 0 \\ 1-x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

7.2. Le seguenti funzioni non sono definite per $x = 0$. Che valore bisogna dare a $f(0)$ affinché risultino continue?

1. $\frac{x^2}{\sin x}$
2. $\frac{\sin 3x}{x}$
3. $\frac{x^2}{|x| \sin x}$
4. $\frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$
5. $\frac{1}{x^2}$

7.3. Dire se le seguenti funzioni sono continue

1. $|x|$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x|+1} & \text{se } x \geq 0 \\ 2-x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} \log(2+x) & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$
7. $[x]^2 - x^2$
8. $\{x\}$
9. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
10. $\{x\}\{-x\}$
11. $x \sin(\pi\{x\})$

7.4. Dimostrare che l'equazione $x^3 + x - a = 0$ ha una e una sola soluzione per ogni $a \in \mathbf{R}$.

7.5. Sia $f(x)$ una funzione continua definita in $\mathbf{R}$, e supponiamo che $x - 5 < f(x) < x + 1$. Dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione.

7.6. Trovare l'immagine della funzione $f(x)$ dell'esercizio precedente.

Dire se le funzioni seguenti sono continue in $\mathbb{R}$ (o se possono essere rese tali assegnando o cambiando opportunamente il loro valore in qualche punto). In caso contrario, classificare i punti di discontinuità.

171. $\arctg \frac{1}{x^2}$ 172. $\arctg \frac{1}{x}$ 173. $x[x]$ 174. $\{x\}\{1-x\}$
 175. $\frac{x+e^{1/x}}{|x|-e^{1/x}}$ 176. $|[x]|^{\{x\}}$ 177. $\frac{1}{1-\ln|\cos x|}$ 178. $\{(-1)^{[x]}x\}$
 179. $\{x\}\{-x\}$ 180. $\{x\} + \{-x\}$.

181. Dire se sono continue le seguenti funzioni, e in caso contrario trovarne i punti di discontinuità:

43. $|x+1|$ 44. $\frac{x+|x|}{2}$ 45. $\frac{|x|-x}{2}$
 46. $[-x]$ 47. $-1-[-x]$ 48. $\{-x\}$
 49. $\max(\sin x, \cos x)$ 50. $\max(\{x\}, \{-x\})$ 51. $\llbracket x \rrbracket = \min(\{x\}, \{-x\})$
 52. $[x] + \{-x\}$ 53. $[x] - \{x\}$ 54. $\{2-x\} + \{x+1\}$
 55. $x + \{-x\}$ 56. $[x^2]$ 57. $\min\left(\frac{1}{x^4}, x^2\right)$
 58. $1 + 2 \left[\frac{x}{1+x^2} \right]$ 59. $1 + \left[\frac{2x}{1+x^2} \right]$.

Dire se sono continue le seguenti funzioni, e in caso contrario trovarne i punti di discontinuità:

182. $x \sin(\pi\{x\})$ 183. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}$.

Dire se sono uniformemente continue le seguenti funzioni, negli intervalli segnati a lato:

184. $\frac{x e^x}{|x|}$ $[-1, 0)$ 185. $x \ln x$ $(0, 3]$
 186. $\left\{x - \frac{1}{2}\right\}$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 187. $\left\{x - \frac{1}{2}\right\}$ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
 188. $\arctg \frac{1}{x}$ $(-1, 0)$ 189. $\arctg \frac{1}{x}$ $(0, 1)$
 190. $\arctg \frac{1}{x}$ $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 191. $x \arctg \frac{1}{x}$ $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

192. Dimostrare che, se $f(x)$ è uniformemente continua in $(a, b]$ e in $[b, c)$, allora lo è anche in (a, c) .

193. Dimostrare che, se $f(x)$ è uniformemente continua in un intervallo (eventualmente illimitato) A , allora esiste una costante C tale che, per ogni $x, x_0 \in A$, risulta $|f(x) - f(x_0)| < 1 + C|x - x_0|$.

194. Mostrare con esempi che il teorema di Weierstrass non sussiste se l'insieme A (1) non è chiuso, (2) non è limitato.

195. Dimostrare che, se $f(x)$ è uniformemente continua in $[a, +\infty)$, e se $g(x)$ è una funzione continua nello stesso insieme e tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0,$$

allora anche $g(x)$ è uniformemente continua in $[a, +\infty)$.

Dire se sono uniformemente continue in $[1, +\infty)$ le seguenti funzioni:

196. $\sqrt[3]{x}$ 197. $\sin x$ 198. x^4 199. $\frac{x^2+1}{x^2}$
 200. $\sin x^2$ 201. $x\sqrt{x}$ 202. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 203. e^x
 204. $x + \frac{\sin x^2}{x}$ 205. $\frac{1}{\ln(1+x)}$.