

4.20. $4L(1 - 2^{-n-1})$

4.21.

- | | | |
|-------------|---|---|
| 1. $3n + 1$ | 3. k_n non è a valori in $\mathbb{N}$ | 5. k_n non è a valori in $\mathbb{N}$ |
| 2. n^4 | 4. $2n^2 - n^4$ | 6. $n \log 2$ |

4.22.

- | | | |
|----------------------------------|---------------------|-------|
| 1. $k_n = 2^n$ | 3. $k_n = n^3$ | 4. no |
| 2. sì; ad esempio $k_n = 2n - 1$ | 5. $k_n = 2n + n^2$ | |

6.1.

- Preso $\varepsilon > 0$, si ha $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ per $n > \frac{1}{\varepsilon}$.
- Fissato $M > 0$, risulta $n - \sin n > n - 1 > M$ per ogni $n > M + 1$.
- Sia $\varepsilon > 0$. Si ha $\left| \frac{4n}{n+2} - 4 \right| = \frac{8}{n+2} > \varepsilon$ non appena $n > \frac{8}{\varepsilon} - 2$.
- Risulta $\sqrt{n} - 2n = \sqrt{n}(1 - 2\sqrt{n}) < -\sqrt{n}$, e quest'ultima quantità è minore di $-M$ non appena $n > M^2$.
- Moltiplicando e dividendo per $n + \sqrt{n^2 - 1}$, si ha $n - \sqrt{n^2 - 1} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$, e quindi $0 < n - \sqrt{n^2 - 1} < \frac{1}{n}$. Preso allora $\varepsilon > 0$, basterà prendere $n > \frac{1}{\varepsilon}$ per avere $|n - \sqrt{n^2 - 1}| = n - \sqrt{n^2 - 1} < \varepsilon$.

6.2.

- No. Ad esempio, se si prende $a_n \equiv 1$ e $b_n \equiv \frac{1}{2}$.
- Sì. Infatti $\frac{|b_n|}{n+2} < \frac{1}{n+2}$, e quindi $\frac{b_n}{n+2}$ tende a zero, mentre $\frac{n}{n+2} a_n$ tende a 1.
- Sì. Infatti, preso $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nella definizione di limite, esiste un v tale che per ogni $n > v$ si ha $|a_n - 1| < \frac{1}{2}$, e quindi in particolare $a_n > \frac{1}{2}$. Ma allora $2a_n + b_n \geq 2a_n - |b_n| > 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$.
- No. Basta prendere $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 - \frac{1}{2n}$.

6.3.

- | | | | |
|------|-------------------|------|------|
| 1. 1 | 2. $-\frac{1}{2}$ | 3. 0 | 4. 0 |
|------|-------------------|------|------|

6.4.

- | | | | |
|--------------|----------------|--------------------|---------------|
| 1. 1 | 7. $+\infty$ | 13. 0 | 19. 1 |
| 2. $+\infty$ | 8. $+\infty$ | 14. $+\infty$ | 20. 1 |
| 3. 1 | 9. $-\infty$ | 15. 1 | 21. $-\infty$ |
| 4. -1 | 10. 0 | 16. 0 | 22. 0 |
| 5. 0 | 11. 0 | 17. 0 | 23. -1 |
| 6. -1 | 12. Non esiste | 18. $\max\{a, 1\}$ | |

6.5. $-1 < a \leq 0$

- Risulta $\left| \frac{n^2+4}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{4n^2+6} < \frac{5}{4n^2}$, e quest'ultima quantità è minore di ε non appena $n > \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}}$.
- Si ha $3\sqrt{n} - 4n = \sqrt{n}(3 - 4\sqrt{n}) < -\sqrt{n} < -M$ non appena $n > M^2$.

3. La relazione $\frac{n^3 - 3n}{n + 2} > M$ è equivalente a $n^3 - (M + 3)n - 2M > 0$, e quest'ultima è certamente verificata se $n^3 > 3(M + 1)n$, cioè se $n > \sqrt{3(M + 1)}$.

4. Moltiplicando e dividendo per $n + \sqrt{n^2 - 1}$, si ottiene $\left| \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \right| = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} < \frac{1}{n} < \epsilon$ se $n > \frac{1}{\epsilon}$.

5. Risulta $n^2 - n \sin n > n^2 - n = n(n - 1) > n$ per $n > 1$, e dunque si avrà $n^2 - n \sin n > M$ per $n > M + 1$.

6. Si ha $2^n = (1 + 1)^n \geq 1 + n + \frac{n(n - 1)}{2}$ (vedi cap. 2, Esercizio 84). Ne segue che $2^n - n \geq \frac{n(n - 1)}{2}$.

7. Segue dalla disuguaglianza $\left| \frac{n^2 - n \sin n}{3n^2 + \cos n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{-3n \sin n - \cos n}{3(3n^2 + \cos n)} \right| < \frac{3n + 1}{3(3n^2 - 1)} < \frac{4n}{3 \cdot 2n^2}$.

8. Si ha $\left| \frac{2n - 1}{3n + 2} - \frac{2}{3} \right| = \frac{7}{9n + 6} < \frac{1}{n}$.

9. Risulta $\left| \frac{1 + 2 \cdot 10^n}{5 + 3 \cdot 10^n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{7}{15 + 9 \cdot 10^n} < \frac{1}{10^n}$.

10. Poiché $\alpha > 1$, si ha sempre $\log_\alpha \left(1 + \frac{1}{n} \right) > 0$. Se si prende $\epsilon > 0$, risulterà $\log_\alpha \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \epsilon$ non appena $1 + \frac{1}{n} < \alpha^\epsilon$, cioè non appena $n > \nu = \frac{1}{\alpha^\epsilon - 1}$.

11. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{\frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha $\left| \sqrt{\frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{\frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{5}{(4n^2 - 2) \left(\sqrt{\frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} < \frac{5\sqrt{2}}{4n^2 - 2}$.

12. Poiché $3^{3n} = (1 + 2)^{3n} \geq 1 + 6n$, si ha $0 < 3^{1-3n} \leq \frac{3}{1 + 6n} < \frac{1}{2n}$.

13. Sì. Infatti, preso $\epsilon = \frac{1}{2}$, esiste un $\nu \in \mathbb{R}$ tale che $1 - \frac{1}{2} < a_n < 1 + \frac{1}{2}$ per ogni $n > \nu$. Ma allora per $n > \nu$ si ha $2a_n - b_n > 1 - 1 = 0$.

14. No. Ad esempio, se $a_n = 1$ e $b_n = (-1)^n \frac{1}{2}$, la successione $a_n + b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2}$ non ha limite.

15. Il limite è 1. Infatti $\frac{na_n + b_n}{n + 1} = \frac{n}{n + 1} a_n + \frac{b_n}{n + 1}$. Ora, la successione $\frac{n}{n + 1} a_n$ ha limite 1, mentre risulta $\left| \frac{b_n}{n + 1} \right| < \frac{1}{n + 1}$, e quindi la successione $\frac{b_n}{n + 1}$ ha limite 0.

16. No. Ad esempio, se si prende $a_n = \frac{n - 1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2} - 1$, si ottiene $a_n + b_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} < 0$.

17. No. Sia $q_n = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$, e si prenda la successione b_n costituita di zeri e di $\frac{1}{2}$ nel modo seguente: si comincia con 0, $\frac{1}{2}$; poi si prendono tanti zeri fino ad avere $q_n < \frac{1}{8}$, quindi tanti $\frac{1}{2}$ fino ad avere $q_n > \frac{1}{4}$, poi di nuovo tanti 0 finché q_n non torni ad essere $< \frac{1}{8}$, e così via. È chiaro che la successione q_n non potrà avere limite. Resta da far vedere che è sempre possibile operare nel modo detto. Supponiamo dunque che per un certo m risulti $q_m > \frac{1}{4}$, e facciamo vedere che si possono prendere un certo numero $n - m$ di zeri in modo che $q_n < \frac{1}{8}$. Si ha $q_n = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_m + \dots + b_n}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_m}{n}$, in quanto se $m < k \leq n$ si è posto $b_k = 0$. Poiché quando $n \rightarrow \infty$ l'ultima quantità tende a zero, si potrà prendere n così grande che sia $q_n < \frac{1}{8}$. In maniera analoga si dimostra che prendendo un numero abbastanza grande di valori $\frac{1}{2}$ si può rendere $q_n > \frac{1}{4}$.

18. Sì. Sia infatti $\epsilon < \frac{1}{2}$, e sia ν tale che per $n > \nu$ risulti $1 - \epsilon < a_n < 1 + \epsilon$. Si ha, per tali n , $1 - \epsilon < a_n^{b_n} < \frac{1}{1 - \epsilon}$, e quest'ultima quantità è minore di $1 + 2\epsilon$. In definitiva, se $n > \nu$, risulta $1 - 2\epsilon < a_n^{b_n} < 1 + 2\epsilon$, e dunque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 1$.

19. Sì. Infatti, poiché $a_n \rightarrow 1$, esiste ν tale che per ogni $n > \nu$ risulta $a_n > \frac{1}{2}$. Sia $\lambda = \min \left\{ \frac{1}{2}, a_1, a_2, \dots, a_\nu \right\}$. Dato che tutti i termini a_n sono positivi, anche λ sarà positivo, e si avrà $a_n \geq \lambda$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se ora K è tale che $K\lambda > 1$, risulterà $Ka_n + b_n > 1 + b_n > 0$.

20. No. Ad esempio, sia $a_n = 1$, e sia b_n la successione che assume il valore 0 per n pari, e $\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{1/n}$ per n dispari. La successione $a_n + |b_n|^n$ varrà allora 1 per n pari, e $2 - \frac{1}{n}$ per n dispari, e quindi non avrà limite.

21. -1	22. 0	23. 1	24. 1
25. 0	26. 0	27. 0	28. $-\infty$
29. 0	30. 2	31. 3	32. 6
33. $+\infty$	34. 1	35. $\max\{a^2, 1\}$	36. $+\infty$
37. 0	38. -1	39. 0	40. 0
41. 0	42. 0	43. $\frac{1}{e}$	44. $\frac{1}{2}$
45. 1	46. $\frac{4}{e}$	47. 1	48. $+\infty$
49. $\frac{2}{3}$	50. 1	51. $+\infty$	52. $+\infty$
53. 1	54. 1	55. 1	56. 0
57. $-\infty$	58. 0	59. $-\infty$	60. 0

61. Non esiste	62. $-\infty$	63. 0	64. 0
65. $-\infty$	66. $+\infty$	67. e^{14}	68. 0
69. 8	70. 0	71. $\frac{1}{3}$	72. $+\infty$
73. $+\infty$	74. $+\infty$	75. 1	76. 0
77. 1	78. 0	79. $+\infty$	80. 0
81. $\frac{27}{4}$	82. $\frac{27}{4}$	83. $\frac{h^h}{k^k(h-k)^{h-k}}$	

84. Se $\beta > 0$, il limite è 0 se $0 \leq A < 1$, $+\infty$ se $A \geq 1$. Se $\beta = 0$, il limite è $+\infty$ se $\alpha > 0$, 0 se $\alpha < 0$, A se $\alpha = 0$. Se $\beta < 0$, il limite è $+\infty$ se $\alpha > 0$, 1 se $\alpha = 0$, 0 se $\alpha < 0$.

85. 0	86. -1	87. 0	88. $a \geq 3$	89. $-1 < a \leq 0$
-------	--------	-------	----------------	---------------------

90. Supponiamo che $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = l$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ν tale che per $n > \nu$ si ha $L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$ e $\sqrt[n]{b_n} < l + \epsilon$. Per tali valori di n si ha allora $L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_n + b_n} < \sqrt[n]{(L + \epsilon)^n + (l + \epsilon)^n} \leq (L + \epsilon) \sqrt[n]{2}$. Se ora si prende ν così grande che sia anche $\sqrt[n]{2} < 1 + \epsilon$, si ottiene $L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n + b_n} < L + \epsilon(L + 1) + \epsilon^2$ per ogni $n > \nu$, e dunque la tesi. Si osservi che lo stesso risultato si ottiene supponendo solamente che $\max \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

91. Per $\epsilon > 0$, sia ν tale che per ogni $n > \nu$ risulti $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$. Per tali n si ha $q_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_\nu}{n} + \frac{a_{\nu+1} + \dots + a_n}{n}$. Posto allora $M = a_1 + \dots + a_\nu$, si ha $\frac{M}{n} + \frac{(n - \nu)(L - \epsilon)}{n} < q_n < \frac{M}{n} + \frac{(n - \nu)(L + \epsilon)}{n}$. Sia ora $\nu_1 > \nu$ un numero tale che per $n > \nu_1$ risulti $\frac{|M|}{n} < \epsilon$ e $\frac{\nu}{n} < \epsilon$. Se $n > \nu_1$, si ha $L - \epsilon(L + 2) < q_n < L + 2\epsilon$, cosicché $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = L$.

92. Si ponga $b_n = a_n - a_{n-1}$; risulterà allora $a_n - a_0 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, e dunque $\frac{a_n}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} + \frac{a_0}{n}$. Se $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1})$, il secondo membro dell'ultima relazione tende a b grazie al risultato dell'esercizio precedente, e dunque anche $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = b$.

93. Tutti i termini della successione a_n sono maggiori di 1, e dunque risulta $a_{n+1} \leq \sqrt{a_n} < a_n$, cosicché la successione è decrescente, e di conseguenza ha limite L . Dalla relazione data segue, passando al limite, che $1 \leq L \leq \sqrt{L}$, e dunque L non può essere che 1.

94. Sia $P(x) = x^7 + x - \frac{1}{n}$. Si ha $P(0) < 0$, e $P(1/n) > 0$, cosicché $P(x)$ ha uno zero compreso tra 0 e $\frac{1}{n}$ (Lezioni, cap. 1, Teorema 4.1). D'altra parte, se si ha $x^7 + x = y^7 + y = \frac{1}{n}$, ragionando come nella dimostrazione del teorema 4.2 del capitolo 1 delle Lezioni si dimostra che $x = y$; di conseguenza la radice x_n trovata è unica. Poiché $0 < x_n < \frac{1}{n}$, per il teorema dei carabinieri si conclude che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.