

4.20. Una palla viene lanciata in alto fino a un'altezza L , e poi ricade, rimbalzando ogni volta a un'altezza metà di quella da cui cade. Calcolare lo spazio s_n percorso quando tocca terra l' n -esima volta.

4.21. Scrivere la successione estratta a_{k_n} quando

- | | |
|---|---|
| 1. $a_n = n + 1, \quad k_n = 3n$ | 4. $a_n = 1 - n^2, \quad k_n = n^2 - 1$ |
| 2. $a_n = n^2, \quad k_n = n^2$ | 5. $a_n = n^2 - 1, \quad k_n = 1 - n^2$ |
| 3. $a_n = n^3, \quad k_n = \sqrt[3]{n}$ | 6. $a_n = \log(n + 1), \quad k_n = 2^n - 1$ |

4.22. Dire se la successione b_n è estratta dalla a_n , e in caso affermativo trovare la successione k_n :

- | | |
|---|---|
| 1. $a_n = \frac{n}{1+n^2}, \quad b_n = \frac{2^n}{1+4^n}$ | 4. $a_n = \frac{1-n}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}$ |
| 2. $a_n = (-1)^n, \quad b_n = -1$ | 5. $a_n = \sqrt{1+n}, \quad b_n = n+1$ |
| 3. $a_n = n^2, \quad b_n = n^6$ | |

6.1. Verificare, usando le definizioni di limite, che si ha

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ | 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sin n) = +\infty$ | 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n+2} = 4$ |
| 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - 2n) = -\infty$ | 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 1}) = 0$ | |

6.2. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che

- (a) $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
 (b) $|b_n| < 1$ per ogni n .

Dire quali delle asserzioni seguenti seguono da (a) e (b):

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + b_n}{n+2} = 1$
- Esiste un numero v tale che $2a_n + b_n > 0$ per ogni $n > v$.
- Esiste un numero v tale che $a_n - b_n \geq 0$ per ogni $n > v$.

6.3. Ricordando i risultati del capitolo precedente, calcolare i seguenti limiti:

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n}$ | 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{1+n}}$ |
| 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right)$ | 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$ |

6.4. Calcolare, se esistono, i limiti delle successioni che seguono:

- | | |
|---|--|
| 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n-2}$ | 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{1+\sqrt{n}}$ |
| 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-1}{2n+3}$ | 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n2^n}{3^n}$ |
| 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-2}}{n}$ | 12. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n)$ |
| 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+9} - \sqrt{n^4+1}}{n^2+2}$ | 13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\log n}}{n^2+1}$ |
| 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right)$ | 14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{\log n}}{n^2+1}$ |
| 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} \right)$ | 15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4+1}$ |
| 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+n} - n)$ | 16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!}$ |
| 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ | 17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$ |
| 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 2^n)$ | 18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n+1} \quad (a \geq 0)$ |
| 19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n^3}{\log(n^3+3n^2)}$ | 22. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 2^{-\sqrt{n}}$ |
| 20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n \sin n}{1+n^2}$ | 23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{-n}}$ |
| 21. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\sqrt{n}} - 2^n)$ | |

6.5. Dire per quali valori reali di a esiste finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + n^a)$$

Verificare, usando la definizione, che

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (3\sqrt{n} - 4n) = -\infty$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n}{n + 2} = +\infty$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 1}) = 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n \sin n) = +\infty$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - n) = +\infty$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n \sin n}{3n^2 + \cos n} = \frac{1}{3}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{3n + 2} = \frac{2}{3}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 \times 10^n}{5 + 3 \times 10^n} = \frac{2}{3}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 \quad (\alpha > 1)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{3n-1}} = 0.$$

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che

$$(a) \quad a_n > 0; \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$(b) \quad |b_n| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dire quali delle asserzioni seguenti è conseguenza delle ipotesi (a) e (b):

$$13. \exists \nu : 2a_n - b_n > 0 \quad \forall n > \nu$$

$$14. \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

$$15. \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + b_n}{n + 1}$$

$$16. \exists \nu : a_n + b_n > 0 \quad \forall n > \nu$$

$$17^* \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

$$18^* \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 1$$

$$19^* \exists K > 0 : Ka_n + b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$20. \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + |b_n|^n).$$

Calcolare i seguenti limiti:

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 9n^2} - \sqrt{n^4 + 1}}{n^2 + 2}$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 1}$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n - 3^n}$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2^n + 5^n}$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{20} + 4n^4 + 1}{n!}$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$33. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right)$$

$$35. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{2n} + 1} \quad \{a \in \mathbb{R}\}$$

$$37. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right)$$

$$39. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$$

$$41. \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$$

$$43. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

$$45^* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

$$47. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{n \ln n}$$

$$49. \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n}) \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$$

$$51. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{8 + \sin 2^{1/n}} - 2 \right)$$

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3n+2}{n^2}}$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 9n} - \sqrt{n^4 + 1}}{n^2 + 2n}$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^5 + 1}$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - n\sqrt{n-1} \right) \sqrt{n^3 + 1}$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} - \sqrt{1 - \frac{4}{n}} \right)$$

$$32. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^6 - (n-1)^6}{(n+1)^5 + (n-1)^5}$$

$$34. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n!} \right)^n$$

$$36. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n+n^3) - 3 \ln n}{n \left(1 - \cos \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$38. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} \right)$$

$$40. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$42. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n}$$

$$44. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$$

$$46. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n(n+1) \dots (2n)}}{n}$$

$$48. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n+1]{n+1} \cdot \dots \cdot \sqrt[2n]{2n}$$

$$50. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n^3}{\ln(n^3 + 3n^2)}$$

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (\sqrt{n})^n - 3^n \}$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n \sin n}{1 + n^2 + n}$$

Calcolare i seguenti limiti:

$$55. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n}}$$

$$57. \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\sqrt{n}} - 2^n)$$

$$59. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n(1-n)}{1+n^2}$$

$$61. \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + (-1)^n]$$

$$63. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 3 \times 2^n}{(5 \times 2^{n-1} - 3)(\sqrt{2n} - \sqrt{n-1})}$$

$$65. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 + 3}{n} - \frac{n^4 + 3n}{n-2} \right)$$

$$67. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n} \right)^{2n}$$

$$69. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n} \right)^4 \right]$$

$$71. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$$

$$73. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$75. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^n} \right)^{n!}$$

$$77. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2 + n^4} \right)^n$$

$$79. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}}}{n^2 + 1}$$

$$81. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{3n}{n}}$$

$$83. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{hn}{kn}}$$

$$85. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3 + 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3 + n^2}} \right)$$

$$86. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{-n}$$

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(\ln n)^2}{\sqrt{n^5 + 1}}$$

$$58. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^5 - 1} - \sqrt{n}}$$

$$60. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n2^n}{3^n}$$

$$62. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^3 - n + \sin n} \right)$$

$$64. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + 1} - \frac{n^3 - 1}{n^2} \right)$$

$$66. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 2}{n + 2} - \frac{n^3 - 2n^2}{n + 1} \right)$$

$$68. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 2^{-\sqrt{n}}$$

$$70. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^6 + n^2 - 1} - n^2 \right)$$

$$72. \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{2n}{n}$$

$$74. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n!} \right)^{n^n}$$

$$76. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10325n}{n^2 - 3}$$

$$78. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}}}{n^2 + 1}$$

$$80^* \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(2\pi \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} \right)$$

$$82. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{3n}{2n}}$$

$$84. \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha A^{n^\beta}$$

$$87. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right)^n$$

Dire per quali valori reali di a esistono finiti i limiti

$$88. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2 + 1}{n^a} \right)^n$$

$$89. \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + n^a)$$

90. Dimostrare che, se a_n e b_n sono due successioni positive, risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n + b_n} = \max \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} \right\}$$

ogni volta che esistono i limiti a secondo membro.

91* Provare che, se $a_n \rightarrow L$, allora la successione $q_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ ha anch'essa limite L .

92. Si dimostri che risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1})$ non appena il secondo limite esiste.

93. Sia a_n una successione tale che $a_0 = 6$ e $1 \leq a_{n+1} \leq \sqrt{a_n}$. Dimostrare che a_n ha limite e trovare il suo valore.

94* Dimostrare che l'equazione $x^7 + x - \frac{1}{n}$ ha una sola soluzione reale x_n . Trovare il limite della successione x_n .