

5.11. Dimostrare le relazioni [5.26]–[5.32].

In maniera del tutto analoga si dimostra che se la funzione f è decrescente, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf_{a < x < x_0} f(x). \quad [5.26]$$

Risultati simili valgono per il limite destro, che esiste per ogni punto $x_0 \in [a, b)$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x_0 < x < b} f(x) \quad [5.27]$$

se f è crescente, e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup_{x_0 < x < b} f(x) \quad [5.28]$$

se f è decrescente.

Sempre in maniera simile si dimostra che se $f(x)$ è una funzione crescente in $(a, +\infty)$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup_{x > a} f(x), \quad [5.29]$$

mentre se f è decrescente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_{x > a} f(x). \quad [5.30]$$

Infine, risulta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf_{x < b} f(x) \quad [5.31]$$

se f è una funzione crescente in $(-\infty, b)$, e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sup_{x < b} f(x) \quad [5.32]$$

se f è decrescente.

5.13. Calcolare, se esistono, gli asintoti delle seguenti funzioni:

1. $x + \frac{1}{x}$

5. $x + \sin x$

2. $\frac{1-x-x^2}{x-1}$

6. $1 + \frac{\sin x}{x}$

3.* $x + \sqrt{x+x^2}$

7. $\frac{1}{x} - \sqrt{x}$

4. $e^x + 1$

8. $\frac{x2^x}{2^x + 1}$

5.12. Verificare che le funzioni seguenti sono monotone negli intervalli indicati a fianco, e trovarne gli estremi inferiore e superiore.

1. $\frac{x}{x+3}$ $[0, 2]$

3. $\frac{x^2}{x+1}$ $(0, +\infty)$

5. $\operatorname{tg}(x^2 - 1)$ $[0, \sqrt{2})$

2. $\log \frac{x}{1-x}$ $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

4. $\sin x^2$ $(-1, 0)$