

3.8.

1. $(-1, 1)$
2. $(-4, 0)$
3. $(-2, 4)$
4. Non esiste; il raggio di un intorno deve essere positivo
5. $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

3.9. $\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}.$

3.10.

1. $E^i = (1, 3), E^e = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty), \partial E = \{1, 3\}$
2. $E^i = (1, 2), E^e = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty), \partial E = \{1, 2\}$
3. $E^i = (-2, -1) \cup (1, 2), E^e = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty), \partial E = \{-2, -1, 1, 2\}$
4. $E^i = \emptyset, E^e = \mathbf{R} - \mathbf{N}, \partial E = \mathbf{N}$
5. $E^i = (-2, 1), E^e = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty), \partial E = \{-2, 1\}$
6. $E^i = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), E^e = \left(-\infty, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, +\infty\right), \partial E = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$
7. $E^i = \emptyset, E^e = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \partial E = [0, 1]$
8. $E^i = (1, 2) \cup (2, 3), E^e = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty), \partial E = \{1, 2, 3\}$
9. $E^i = (0, 2), E^e = (-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty), \partial E = \{0, 2, 3\}$

3.11. Se x è interno ad A , esiste un intorno I di x , con $I \subset A$. A maggior ragione sarà $I \subset B$, e quindi x è interno a B .

3.12.

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. no | 3. no | 5. si | 7. no | 9. no |
| 2. no | 4. si | 6. si | 8. no | |

3.13.

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. si | 3. si | 5. si | 7. si | 9. no |
| 2. si | 4. no | 6. si | 8. si | |

3.14.

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. no | 3. si | 5. no | 7. no | 9. no |
| 2. no | 4. no | 6. no | 8. no | |

3.15.

- | | | | | |
|-------------|---------------------------|---------------|---|-------------|
| 1. $[1, 3]$ | 3. $\emptyset$, | 5. $[-2, -1]$ | 6. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ | 8. $[1, 3]$ |
| 2. $[1, 2]$ | 4. $[-2, -1] \cup [1, 2]$ | 7. $[0, 1]$ | 9. $[0, 2]$ | |

3.16. Per la proposizione 3.1, esiste sempre un numero razionale r compreso tra a e b .

Se ora si prende un intero n maggiore di $\frac{\sqrt{2}}{b-r}$, il numero $\alpha = r + \frac{\sqrt{2}}{n}$ è compreso

tra a e b , in quanto si ha $a < r < \alpha = r + \frac{\sqrt{2}}{n} < r + (b-r) = b$. Inoltre α è irrazionale,

in quanto se fosse razionale, sarebbe razionale anche $\sqrt{2} = n(\alpha - r)$.

3.17. Ricordiamo che la parte frazionaria $\{x\} = x - [x]$ di un numero reale x verifica le disuguaglianze $0 \leq \{x\} < 1$. I numeri $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{m\alpha\}$ sono tutti diversi tra loro. Infatti se fosse $\{r\alpha\} = \{s\alpha\}$, il numero $t = (r-s)\alpha$ sarebbe intero, e quindi $\alpha =$

$= \frac{t}{r-s}$ sarebbe razionale. D'altra parte essi sono tutti compresi tra 0 e 1, e quindi ce

ne sono almeno due la cui distanza è minore di $\frac{1}{m}$. Siano $\{k\alpha\}$ e $\{h\alpha\}$, e supponiamo

che sia $\{k\alpha\} > \{h\alpha\}$; si ha allora $\{(k-h)\alpha\} = \{k\alpha\} - \{h\alpha\} < \frac{1}{m}$. Se poniamo $q = k-h$,

si ha $-m < q < m$, e posto $p = [q\alpha]$ risulta $0 < \{q\alpha\} = q\alpha - p = |q\alpha - p| < \frac{1}{m}$.

Cambiando eventualmente il segno di p e q , si può supporre che sia $q > 0$, e quindi

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{mq}.$$

4.1.

$$0, -2, t^2 - 3t, 4x^2 - 6x, x^4 - 6x^3 + 9x^2, \sin^2 x - 3 \sin x, x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x$$

4.2.

- | | | |
|-------------------|---------------------|-----------------|
| 1. $(3, 7]$ | 5. $\mathbf{R}$ | 9. $[0, 2)$ |
| 2. $[-1, 2]$ | 6. $[0, 2)$ | 10. $(0, 1]$ |
| 3. $[0, 4)$ | 7. $(0, \log_5 11]$ | 11. $\{-1, 1\}$ |
| 4. $[1, +\infty)$ | 8. $(-\infty, 0)$ | |

4.3.

- | | | |
|---|--------------------------------------|--------------------|
| 1. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ | 4. $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ | 7. $[-1, 0)$ |
| 2. $x \geq -\frac{4}{5}$ | 5. $(-3, -2) \cup (0, 1)$ | 8. $(-1, +\infty)$ |
| 3. $(-1, 1)$ | 6. $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$ | |

4.4. (a) $f^{-1}(D)$ è l'insieme di tutti gli $x \in A$ che vengono mandati in D . In altre parole, per ogni $x \in f^{-1}(D)$ risulta $f(x) \in D$, e quindi $f(f^{-1}(D)) \subset D$. (b) $f^{-1}(f(E))$ è l'insieme di tutti gli $x \in A$ che vengono mandati in $f(E)$. Tra questi ci sono per definizione tutti gli $x \in E$, e dunque $E \subset f^{-1}(f(E))$.

4.5. Se f è surgettiva, ogni punto di D è immagine di qualche punto di $f^{-1}(D)$, e quindi $f(f^{-1}(D)) = D$. Se invece f è iniettiva, un punto $y \in f(E)$ (che proviene da un $x \in E$) non può provenire da nessun altro punto; di conseguenza $f^{-1}(f(E)) = E$.

4.6.

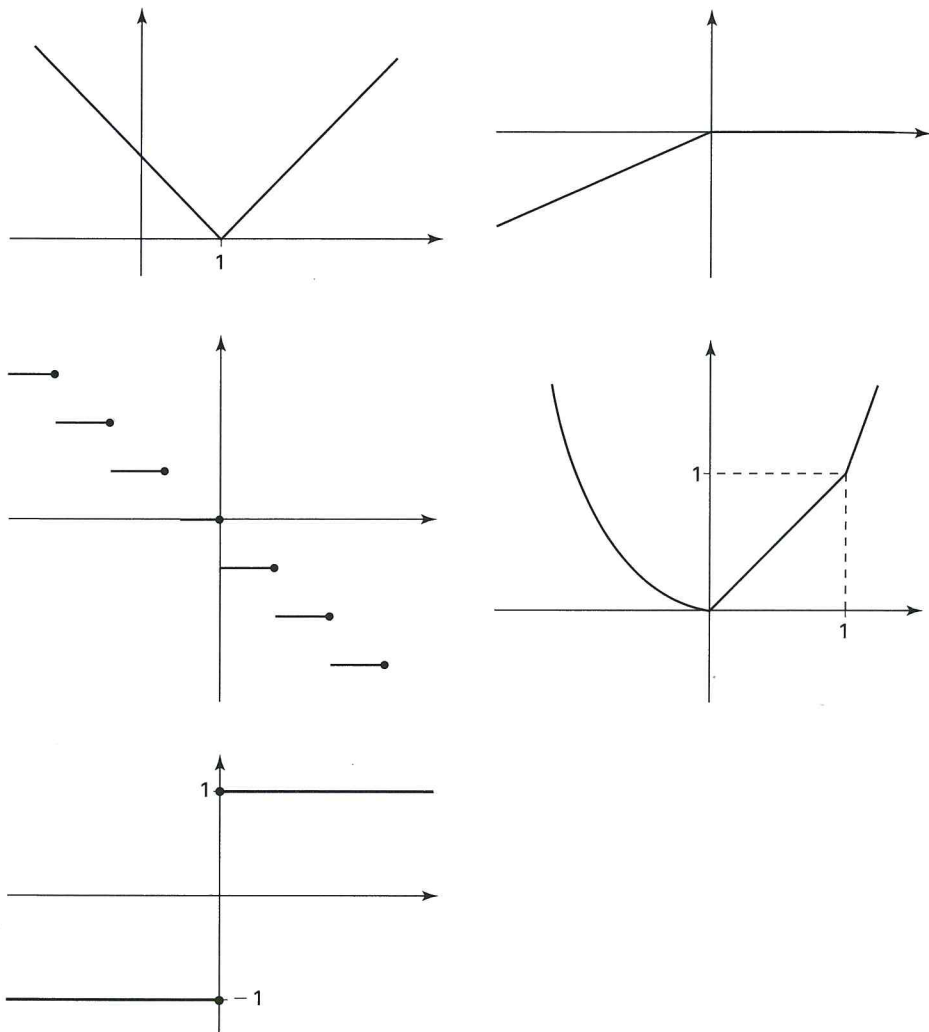


Figura 4.18

4.7. $-[-x]$

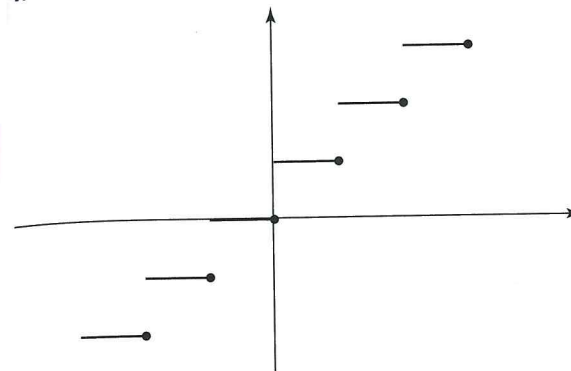


Figura 4.19

4.8. $\left[x + \frac{1}{2}\right]$

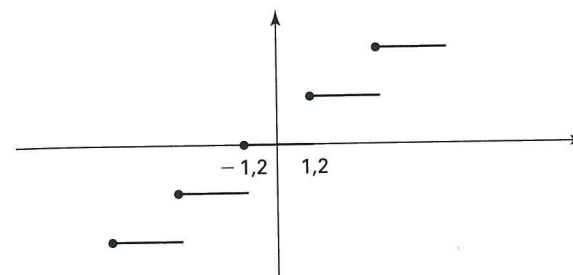


Figura 4.20

4.9.

1. no
2. sì, π
3. sì, $\frac{\pi}{2}$
4. no

5. sì, qualsiasi numero positivo

6. sì, π

7. no

4.10.

1. pari
2. dispari
3. pari
4. pari
5. pari
6. né pari né dispari

7. pari

8. dispari

9. pari

10. dispari

11. né pari né dispari

4.11.

1. $(x^2 + 3) + (-x)$

4. $\frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$

2. $\cos \frac{x}{2} + (\sin 2x - x)$

5. $\frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

3. $\frac{-1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 1}$

4.12.

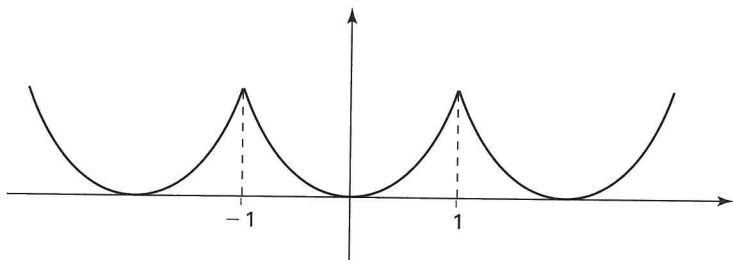


Figura 4.21

4.14.

1. $\frac{x}{3}$

6. $\frac{1}{x}$

2. $\frac{1-x}{2}$

7. Non è invertibile

3. Non è invertibile

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}|x|$

4. $\frac{2x+1}{1-x}$

9. $10^{x-1} - 1$

5. La restrizione di $\tan x$ all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

10. $\log_2 \frac{x}{1-x}$

4.15. $x; f^{-1} = f$

4.16.

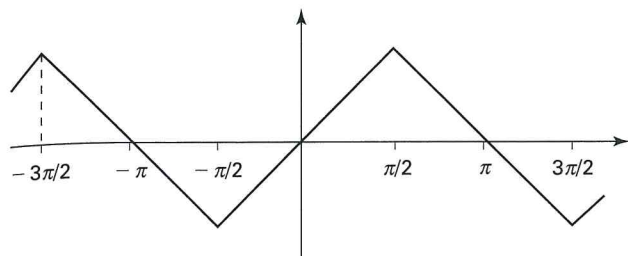


Figura 4.22

4.17.

1. $[2, +\infty)$

6. $[1, +\infty)$

11. $\mathbb{R}$

2. $\mathbb{R} - \{1, 3\}$

7. $\mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

12. $[-2, 0]$

3. $(-\infty, 0]$

8. $[0, 1]$

13. $\left(-\infty, \frac{\pi}{4}\right)$

4. $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

9. $x > 0; x \neq 1$

14. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

5. $\mathbb{R} - \{1\}$

10. $\emptyset$

15. $(-1, 1)$

4.18.

1. 4; 2

3. 24; 0

5. $\frac{1}{2}; 0$

2. 2; -2

4. $1; \frac{1}{2}$

6. $+\infty; 1$

4.19.

1. sì, sì

3. no, sì

5. sì, sì

2. no, sì

4. no, no

6. no, no