

N.B: sostituire “intorno” con “palla” e “ $I(x, r)$ ” con “ $B(x, r)$ ”.

3.8. Scrivere i seguenti intornoi in $\mathbf{R}$ come intervalli:

- | | |
|---------------|-----------------------------------|
| 1. $I(0, 1)$ | 4. $I(1, -1)$ |
| 2. $I(-2, 2)$ | 5. $I\left(2, \frac{1}{2}\right)$ |
| 3. $I(1, 3)$ | |

3.9. Un intervallo aperto (a, b) è sempre un intorno in $\mathbf{R}$. Trovare il suo centro e il suo raggio.

3.10. Trovare i punti interni, esterni e di frontiera dei seguenti insiemi:

- | | |
|---|---|
| 1. $(1, 3]$ | 6. $\left\{x \in [0, 2\pi] : \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ |
| 2. $[0, 2) \cap [1, 5]$ | 7. $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$ |
| 3. $\{x \in \mathbf{R} : 1 < x < 2\}$ | 8. $(1, 3) - \{2\}$ |
| 4. $\mathbf{N}$ | 9. $(0, 2) \cup \{3\}$ |
| 5. $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + x < 2\}$ | |

3.11. Dimostrare che se x è interno ad A , e se $A \subset B$, allora x è interno a B .

3.12. Dire se sono aperti gli insiemi dell'esercizio 3.10.

3.13. Dire se sono aperti i seguenti insiemi:

- | | | |
|---------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1. $I(0, 1)$ | 4. $(-1, 1) \cup (0, 2)$ | 7. $I(1, 3) \cup I(3, 1)$ |
| 2. $(-1, 1) \cup [0, 2)$ | 5. $\mathbf{R} - \{0\}$ | 8. $I(1, 3) \cap I(3, 1)$ |
| 3. $(-3, -2) \cup (2, 3)$ | 6. $(-\infty, 1) \cap (0, 3]$ | 9. $(-\infty, 1) \cap [-2, 3)$ |

3.14. Dire se sono chiusi gli insiemi dell'esercizio 3.10.

3.15. Trovare i punti di accumulazione degli insiemi degli esercizi 3.10.

3.16.* Dimostrare che tra due numeri reali a e b , con $a < b$ cade sempre un numero irrazionale. (Si prenda prima un numero razionale r con $a < r < b$, e poi si cerchi tra i numeri irrazionali $r + \frac{\sqrt{2}}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) uno che sia ancora minore di b).

3.17.** Dato un numero irrazionale α , dimostrare che per ogni intero positivo m esiste un numero razionale $\frac{p}{q}$, con $0 < q < m$, tale che $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{mq}$.

4.1. Sia $f(x) = x^2 - 3x$. Si calcoli $f(0), f(1), f(t), f(2x), (f(x))^2, f(\sin x), f \circ f(x)$.

4.2. Per ognuna delle funzioni elencate, calcolare l'immagine degli insiemi indicati a fianco.

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. $2x + 1;$ $(1, 3]$ | 7. $\log_5(10^x + 1);$ $(-\infty, 1]$ |
| 2. $3x - 4;$ $[1, 2]$ | 8. $1 - \frac{1}{x};$ $(0, 1)$ |
| 3. $ x - 1 ;$ $(0, 5)$ | 9. $\frac{x + x }{2};$ $(-2, 2)$ |
| 4. $x^2 + 1;$ $\mathbf{R}$ | 10. $\sin x;$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| 5. $x^3 - 1;$ $\mathbf{R}$ | 11. $\frac{x}{ x };$ $\mathbf{R} - \{0\}$ |
| 6. $ x^2 - x ;$ $(0, 2)$ | |

4.3. Per ognuna delle funzioni elencate, calcolare la controimmagine degli insiemi indicati a fianco.

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $3x + 2;$ $[1, 3)$ | 5. $x^2 + 2x;$ $(0, 3)$ |
| 2. $\frac{1}{x+1};$ $[0, 5]$ | 6. $\frac{x+1}{x};$ $[0, +\infty)$ |
| 3. $x^2 + 3;$ $[-1, 4)$ | 7. $\sqrt{1+x};$ $[0, 1)$ |
| 4. $\frac{x+1}{x+2};$ $(-\infty, -1)$ | 8. $\frac{x- x }{2};$ $(-1, 1)$ |

4.4. Dimostrare che per ogni $D \subset \mathbf{R}$ e per ogni $E \subset A$ risulta $f(f^{-1}(D)) \subset D$, e $f^{-1}(f(E)) \supset E$.

4.5. Dimostrare che se f è surgettiva si ha $f(f^{-1}(D)) = D$, e che se f è iniettiva risulta $f^{-1}(f(E)) = E$.

4.6. Disegnare il grafico delle funzioni seguenti.

- | | | |
|----------------------|----------------------|---|
| 1. $ x-1 $ | 3. $[-x]$ | 5. $* 1 + 2 \left[\frac{x}{1+x^2} \right]$ |
| 2. $\frac{x- x }{4}$ | 4. $\max \{x, x^2\}$ | |

4.7.* La funzione $[x]$ rappresenta l'approssimazione intera di x per difetto. Quale funzione dobbiamo prendere se vogliamo l'approssimazione intera di x per eccesso? Disegnare un grafico

4.8.* Esprimere analiticamente l'approssimazione di x all'intero più vicino (se x dista ugualmente da due interi, si prende l'approssimazione per eccesso; ad esempio, se $x = \frac{1}{2}$ si sceglie 1).

4.9. Dire se le seguenti funzioni sono periodiche, e in caso affermativo trovare il periodo.

- | | | |
|------------------------------|---------------|---------------|
| 1. $x \cos x$ | 4. $\sin x^2$ | 6. $\sin^2 x$ |
| 2. $1 + \operatorname{tg} x$ | 5. 4 | 7. $[x]$ |
| 3. $\cos 4x$ | | |

4.10. Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. $x^2 + 1$ | 5. $x \log \cos x$ | 9. $\frac{\sin x}{x}$ |
| 2. $\frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ | 6. $[x]$ | 10. $\frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ |
| 3. $\sin x^2$ | 7. $\frac{2^x + 2^{-x}}{3}$ | 11. $\frac{x}{2^x - 1}$ |
| 4. $\cos 3x$ | 8. $\log \frac{1-x}{1+x}$ | |

4.11. Scrivere le seguenti funzioni come somma di una funzione pari e di una dispari.

- | | | |
|-------------------------------------|------------------------|-----------|
| 1. $x^2 - x + 3$ | 3. $\frac{x-1}{x^2+1}$ | 5. $f(x)$ |
| 2. $\sin 2x + \cos \frac{x}{2} - x$ | 4. $* 3^x$ | |

4.12. Disegnare il grafico della funzione periodica di periodo 2, che coincide con x^2 per $-1 \leq x \leq 1$.

4.14. Trovare, se esiste, l'inversa delle seguenti funzioni:

- | | | |
|----------------------|-----------------------------|-------------------------|
| 1. $3x$ | 5. $\operatorname{arctg} x$ | 8. $2x - x $ |
| 2. $1 - 2x$ | 6. $\frac{1}{x}$ | 9. $1 + \log_{10}(1+x)$ |
| 3. $x^2 - 1$ | 7. $x - x $ | 10. $\frac{2^x}{1+2^x}$ |
| 4. $\frac{x-1}{x+2}$ | | |

4.15. Sia $f(x) = \sqrt[7]{1-x^7}$. Calcolare $f \circ f(x)$. Trovare la funzione inversa di $f(x)$.

4.16.* Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

4.17. Trovare l'insieme di definizione delle funzioni seguenti:

- | | | |
|--|----------------------------------|--|
| 1. $\sqrt{x-2}$ | 6. $\sqrt{x^3 x -1}$ | 11. $(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}$ |
| 2. $\frac{x}{x^2-4x+3}$ | 7. $\frac{x}{4-2^{\frac{1}{x}}}$ | 12. $\arcsin(1+x)$ |
| 3. $\frac{\sqrt{1-2^x}}{\sqrt{4-2^x}}$ | 8. $x^{\sin \sqrt{1-x}}$ | 13. $\log(1 - \operatorname{arctg} x)$ |
| 4. $x \log(1+3x)$ | 9. $\log_x 2$ | 14. $\arccos \frac{x}{x+1}$ |
| 5. $\sqrt[5]{\frac{x-2}{x-1}}$ | 10. $\frac{1}{\sqrt{x- x }}$ | 15. $\log \operatorname{arctg}(1-x^2)$ |

4.18. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore delle funzioni che seguono, negli insiemi indicati a lato di ognuna di esse.

- | | | |
|------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| 1. $x+1$; $[1, 3]$ | 3. $3x^3$; $[0, 2)$ | 5. $\frac{x}{x+2}$; $[0, 2]$ |
| 2. x^2-2 ; $[-1, 2)$ | 4. $\frac{1}{x}$; $(1, 2)$ | 6. $\frac{1}{x+1}$; $(-1, 0)$ |

4.19. Dire se gli estremi superiore e inferiore delle funzioni dell'esercizio precedente sono rispettivamente massimi o minimi.