

1.17. Si verifichi che le relazioni valgono per $n = 1$, e che se valgono per n valgono anche per $n + 1$. Ad esempio, dimostriamo che $3^n > n^2 + 1$. Si ha $3^1 = 3 > 1^2 + 1 = 2$, e quindi la relazione vale per $n = 1$. Se poi vale per n , risulta $3^{n+1} = 3 \times 3^n > 3(n^2 + 1)$, mentre $(n + 1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2 \leq 3n^2 + 2 < 3(n^2 + 1)$.

1.18. La disuguaglianza è vera per $n = 1$. Se si suppone vera per n , si ha $(1 + a)^{n+1} \leq (1 + a) \left(1 + na + \frac{n^2 a^2}{2} \right)$. Eseguendo il prodotto, e ricordando che $a < 0$, si vede che il secondo membro è minore di $1 + (n + 1)a + \frac{n^2 + 2n}{2} a^2 < 1 + (n + 1)a + \frac{1}{2}(n + 1)^2 a^2$.

1.19. Si ha $s_1 = 1 > \frac{1}{2}$, e dunque la relazione è vera per $n = 1$. Se la supponiamo vera per n , si ha $s_{2^{n+1}} = s_2^n + \frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}$. Questi ultimi sono 2^n termini, ognuno dei quali è maggiore o uguale a $\frac{1}{2^{n+1}}$; la loro somma è allora maggiore di $\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$. Si ha allora $s_{2^{n+1}} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$, e la relazione è dimostrata per $n + 1$.

1.20. Si ha $ab + 1 = a + b - (a - 1)(1 - b) \leq a + b$.

1.21. La proposizione è vera per $n = 1$; infatti se $a_1 = 1$ si ha anche $a_1 \geq 1$. Supponiamo allora che il risultato sia vero per n e dimostriamolo per $n + 1$. Sia $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1}$ e $a_1 a_2 \dots a_{n+1} = 1$; si ha allora $a_1 \leq 1$ e $a_{n+1} \geq 1$, e quindi $a_1 a_{n+1} \geq a_1$; per l'ipotesi induttiva $a_1 a_{n+1} + a_2 + \dots + a_n \geq n$. D'altra parte per l'esercizio precedente $a_1 a_{n+1} \leq a_1 + a_{n+1} - 1$, da cui segue il risultato per $n + 1$.

1.23.

1. $2 + 3 + 4 + 5$

4. $1 + 1 + 1 + 1$

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

5. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$

3. $1 + 2 + 4 + 8 + 16$

1.24.

1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

5. $\sum_{k=1}^n k^4$

2. $\sum_{k=1}^n 1$

6. $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k$

3. $-\sum_{k=0}^n 2^{-k}$

7. $\sum_{k=2}^n 2^{2k-3} = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{2k-1}$

4. $\sum_{k=1}^n k^2$

1.25.

1. $s_1 = 1, s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1}$

5. $s_1 = 1, s_{n+1} = s_n + (n+1)^4$

2. $s_1 = 1, s_{n+1} = s_n + 1$

6. $s_1 = 1, s_{n+1} = s_n + (-1)^n(n+1)$

3. $s_0 = -1, s_{n+1} = s_n - 2^{-n-1}$

7. $s_2 = 1, s_{n+1} = s_n + 2^{2n-1}$

4. $s_1 = 1, s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$

1.26. Dimostriamo ad esempio che $n^n \geq n!$. La relazione è vera per $n = 1$, dato che $1^1 = 1 = 1!$. Se si suppone vera per n , si ha

$$(n+1)^{n+1} = (n+1)(n+1)^n > (n+1)n^n \geq (n+1)n! = (n+1)!$$

e la relazione vale per $n + 1$.

2.1. (1) Dalle ipotesi $qd = bc$ e $xz = yw$ segue che $adxz = bcyw$, e quindi $ax \times dz = by \times cw$, che dice che le frazioni $\frac{ax}{by}$ e $\frac{cw}{dz}$ sono equivalenti.

(2) Bisogna dimostrare che $\frac{ay+bx}{by}$ è equivalente a $\frac{cz+dw}{dz}$, cioè che $(ax+by)dz = (cz+dw)by$, ovvero sviluppando che $adyz + bdxz = bcyz + bdyw$. Ora si ha $ad = bc$ e $xz = yw$, e quindi $adyz = bcyz$ e $bdxz = bdyw$, da cui segue la tesi.

2.2. Se si suppone $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, con p e q interi primi tra loro, si avrebbe $p^2 = 3q^2$, e quindi p sarebbe divisibile per 3: $p = 3k$. Ma allora $9k^2 = 3q^2$, ossia $3k^2 = q^2$, e anche q sarebbe divisibile per 3, contro l'ipotesi.

2.3. Se fosse $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$, con p e q interi primi tra loro, si avrebbe $p^3 = 2q^3$, e p sarebbe pari: $p = 2h$. Ma allora $8h^3 = 2q^3$, ossia $4h^3 = q^3$, e anche q sarebbe pari.

2.4. Si sommi $-a$ ad ambedue i membri.

2.5. Si ha $0 = [1 + (-1)] \times a = a + (-1) \times a$ (per la proprietà distributiva *SP*), ed essendo per definizione $0 = a + (-a)$, risulta per l'esercizio precedente $-a = (-1) \times a$.

2.6. Si ha $b - a \geq 0$ e dunque $(b - a)s \geq 0$ per *PO*. Da *SP* segue che $bs - as \geq 0$, e da *SO*, sommando as ad ambedue i membri, si ha $bs \geq as$.

2.7. Moltiplicando per s (che per ipotesi è ≥ 0) ambo i membri di $s \leq t$ si trova per l'esercizio precedente $s^2 \leq st$. Se invece si moltiplica per t si ha $st \leq t^2$. Per la proprietà transitiva O_3 si ha allora $s^2 \leq t^2$.

2.8.

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1. no | 3. no | 5. si | 7. si | 9. no |
| 2. si | 4. no | 6. no | 8. no | 10. si |

2.9.

- | | | | | |
|-------|-------|---------------------|-------|--------|
| 1. si | 3. si | 5. si | 7. si | 9. no |
| 2. no | 4. si | 6. Non è un insieme | 8. si | 10. si |

2.10.

1. $A \cup B = (1, 4)$, $A \cap B = [2, 3)$, $A - B = (1, 2)$
2. $A \cup B = (0, 3)$, $A \cap B = (1, 2)$, $A - B = (0, 1]$
3. $A \cup B = [-1, 1]$, $A \cap B = (0, 1)$, $A - B = [-1, 0]$
4. $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = (1, 2)$, $A - B = (-\infty, 1]$
5. $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A - B = [1, 3]$
6. $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A - B = (-1, 1] \cup [3, +\infty)$
7. $A \cup B = [-1, 1]$, $A \cap B = \emptyset$, $A - B = A$
8. $A \cup B = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, $A \cap B = (2, 3)$, $A - B = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$
9. $A \cup B = (-\sqrt{3}, 2) \cup (3, 4)$, $A \cap B = (1, \sqrt{3})$, $A - B = [\sqrt{3}, 2) \cup (3, 4)$
10. $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = (-\infty, 0) \cup (0, 2]$, $A - B = \{0\}$

2.11.

- | | |
|---|--|
| 1. $(-3, 1], \emptyset, (-\infty, -1]$ | 4. $(0, 1), \emptyset, (-1, +\infty)$ |
| 2. $(0, 6), (2, 6)$ e $(-\infty, -3) \cup [6, +\infty)$ | 5. $(0, +\infty), \emptyset, [3, +\infty)$ |
| 3. $\emptyset, \emptyset, (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ | |

2.12.

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $[0, +\infty)$ | 6. $\{1\}$ |
| 2. $\emptyset$ | 7. $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$ |
| 3. $(-\infty, 0]$ | 8. $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ |
| 4. $[0, +\infty)$ | 9. $(0, 3)$ |
| 5. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ | 10. $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ |

2.13. Perché x appartenga all'intersezione, deve essere $a < x < b$ e $c < x < d$, e quindi $\max\{a, c\} < x < \min\{b, d\}$. Questo intervallo non è vuoto se $c < b$ e $a < d$.

2.14. Se fosse $a > b$, prendendo $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ si avrebbe $a < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a$, che è assurdo.

2.19. Il minimo m di E è un minorante, dato che ogni altro elemento di E è maggiore di m . D'altra parte, un numero t maggiore di m non può essere un minorante, essendo maggiore di un elemento di E (per l'appunto m). Pertanto m è il massimo dei minoranti, e dunque l'estremo inferiore.

2.20.

- | | | |
|-----------------------|--------------------|-----------------------|
| 1. 2, no | 4. $\sqrt{2}$, no | 7. 1, si |
| 2. $\frac{3}{2}$, si | 5. 3, si | 8. $\frac{1}{2}$, si |
| 3. $+\infty$ | 6. 4, si | 9. $+\infty$ |

2.21.

- | | | |
|-----------------------|---------------------|--------------|
| 1. $-\infty$ | 4. $-\sqrt{2}$, no | 7. 0, no |
| 2. $-\infty$ | 5. 0, no | 8. -1 , si |
| 3. $\frac{1}{2}$, si | 6. $-\infty$ | 9. $-\infty$ |

2.22. Se $A \subset B$, un maggiorante di B è anche maggiorante di A . Questo vale in particolare per $\sup B$, che è un maggiorante di B . Ma allora $\sup A$, che è il minimo dei maggioranti di A , è minore o uguale a $\sup B$.

2.23.

- | | |
|--|------------------|
| 1. $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ | 3. $a^2 - a + 1$ |
| 2. $5^{5^5} - 10^{10}$ | 4. 0 |
| 5. $x - 1$ se $x \geq 1$, $1 - x$ se $0 \leq x < 1$, $x + 1$ se $-1 < x < 0$, $-x - 1$ se $x \leq -1$ | |

2.24. Se $x \geq 0$ si ha $|x| = x$, altrimenti $|x| = -x$. In ogni caso, $|x|^2 = x^2$.

2.25. Risulta $\max\{-a, a\} < r$ se e solo se $a < r$ e $-a < r$, ovvero se e solo se $a < r$ e $a > -r$.

2.26. Risulta $b \leq c \leq \max\{-a, c\}$, $-b \leq -a \leq \max\{-a, c\}$, e dunque $|b| = \max\{b, -b\} \leq \max\{-a, c\}$

2.27.

- | | |
|--|--|
| 1. $x < 1$ | 6. $x \leq \frac{5}{4}$ |
| 2. $-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$
e $x > 2 + \sqrt{5}$ | 7. $x \neq 3$ |
| 3. $ x < 3$ | 8. $-\frac{\sqrt{5}+1}{4} < x < 0$ e $\frac{\sqrt{5}-1}{4} < x < \frac{\sqrt{5}+3}{4}$ |
| 4. $\emptyset$ | 9. $x \leq -2$ e $x \geq \frac{1}{2}$ |
| 5. $x \leq -1$ | 10. $0 < x < 1 + \sqrt{3}$ |

2.28. Supponiamo che $x \geq y$. Si ha allora $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \leq x + y - 2\sqrt{y^2} = x - y$, e la disuguaglianza cercata segue prendendo la radice. Se poi $x < y$ basta ripetere lo stesso ragionamento scambiando x e y .

2.29. Si ha $1 - x^2 \leq 1$, da cui la disuguaglianza richiesta segue dividendo per $1 - x > 0$.