

**1.17.** Dimostrare per induzione le formule seguenti:

1.  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2.  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$
3.  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4.  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \dots + n)^2$
5.  $2^n \geq n + 1$
6.  $3^n \geq n^2 + 1$
7.  $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (a \neq 1)$
8.  $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
9.  $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n+1) = (2n+1)(n+1)$

**1.18.** Dimostrare che se  $-1 < a < 0$  si ha  $(1+a)^n \leq 1 + na + \frac{n^2 a^2}{2}$ .

**1.19.\*** Posto  $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ , dimostrare per induzione che si ha  $s_{2^n} > \frac{n}{2}$ .

**1.20.** Dimostrare che se  $a \geq 1$  e  $b \leq 1$  si ha  $ab + 1 \leq a + b$ .

**1.21.\*** Dimostrare che se  $a_1, \dots, a_n$  sono numeri positivi, con  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , si ha  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ .

**1.23.** Scrivere esplicitamente le somme seguenti:

- |                                |                                  |
|--------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\sum_{k=1}^4 (k+1)$        | 4. $\sum_{j=2}^5 1$              |
| 2. $\sum_{e=1}^3 \frac{1}{2e}$ | 5. $\sum_{k=-1}^1 \frac{1}{2-k}$ |
| 3. $\sum_{k=0}^4 2^k$          | 6. $\sum_{k=1}^k k$              |

**1.24.** Scrivere le somme seguenti mediante il simbolo di sommatoria:

- |                                                            |                                                 |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$   | 5. $s_n = 1 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$          |
| 2. $s_n = 1 + 1 + \dots + 1$                               | 6. $s_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n+1} n$ |
| 3. $s_n = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - 2^{-n}$ | 7. $s_n = 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2n-3}$     |
| 4. $s_n = 1 + 4 + \dots + n^2$                             |                                                 |

**1.25.** Scrivere le somme dell'esercizio precedente in forma ricorsiva.

**1.26.** Dimostrare per induzione le seguenti relazioni:

1.  $n^n \geq n!$
2.  $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n = 2^n n!$
3.  $\forall n \geq 4, n! > 2^n$

**2.1.** Siano  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  due frazioni equivalenti ( $ad = bc$ ), e siano  $\frac{x}{y}$  e  $\frac{w}{z}$  ancora due frazioni equivalenti ( $xz = yw$ ). Dimostrare che:

- (1)  $\frac{a}{b} \times \frac{x}{y}$  è equivalente a  $\frac{c}{d} \times \frac{w}{z}$ ;
- (2)  $\frac{a}{b} + \frac{x}{y}$  è equivalente a  $\frac{c}{d} + \frac{w}{z}$ .

**2.2.** Dimostrare che  $\sqrt{3}$  non è un numero razionale.

**2.3.** Dimostrare che  $\sqrt[3]{2}$  non è un numero razionale.

**2.4.** Dimostrare che se  $a + b = a + c$ , allora  $b = c$ .

**2.5.** Si dimostri che  $-a = (-1) \times a$ .

**2.6.** Si dimostri che se  $a \leq b$  e  $s \geq 0$  si ha  $as \leq bs$ .

**2.7.** Si dimostri che se  $0 \leq s \leq t$  si ha  $s^2 \leq t^2$ .

**2.8.** Dire se i seguenti insiemi sono contenuti nell'intervallo aperto  $(1, 5)$ :

- |                                          |                                               |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1. $\{1\}$                               | 6. $[1, 2)$                                   |
| 2. $[2, 3]$                              | 7. $(1, 2]$                                   |
| 3. $\{2, 5\}$                            | 8. $\{x \in \mathbf{R} : 1 < x^2 < 2\}$       |
| 4. $\{x \in \mathbf{R} : x^2 - 2x = 0\}$ | 9. $(-\infty, 4)$                             |
| 5. $\emptyset$                           | 10. $\{c \in \mathbf{R} : c^2 - 5c + 6 < 0\}$ |

**2.9.** Dire se i seguenti insiemi sono contenuti nella semiretta chiusa  $[-1, +\infty)$ :

- |                                         |                                             |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1. $\{-1\}$                             | 6. $-1$                                     |
| 2. $[-2, -1]$                           | 7. $[1, 5]$                                 |
| 3. $(0, 3)$                             | 8. $\{x \in \mathbf{R} : x^2 - x - 2 = 0\}$ |
| 4. $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2 < x\}$ | 9. $\{x \in \mathbf{R} : x^2 > 1\}$         |
| 5. $(-1, +\infty)$                      | 10. $\mathbf{N}$                            |

**2.10.** Calcolare l'unione  $A \cup B$ , l'intersezione  $A \cap B$  e la differenza  $A - B$  dei seguenti insiemi:

1.  $A = (1, 3), B = [2, 4)$
2.  $A = (0, 2), B = (1, 3)$
3.  $A = [-1, 1), B = (0, 1]$
4.  $A = (-\infty, 2), B = (1, +\infty)$
5.  $A = (-\infty, 3], B = (-\infty, 1)$
6.  $A = (-1, +\infty), B = (1, 3)$
7.  $A = [-1, 0], B = (0, 1]$
8.  $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 > 4\}, B = (1, 3)$
9.  $A = (1, 2) \cup (3, 4), B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 3\}$
10.  $A = (-\infty, 2], B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 > 0\}$

**2.11.** Calcolare  $A \cap (B \cup C)$ ,  $(A - B) \cap C$  e  $(A \cup B) - C$  nei casi seguenti:

1.  $A = (-\infty, 1], B = (-3, 3), C = (-1, 5]$ .
2.  $A = (0, +\infty), B = (-\infty, 2], C = [-3, 6)$ .
3.  $A = \emptyset, B = \mathbf{R}, C = [0, 1]$ .
4.  $A = (-1, 1), B = \mathbf{R}^+, C = \emptyset$ .
5.  $A = B = \mathbf{R}^+, C = [-2, 3)$ .

**2.12.** Trovare il complementare (in  $\mathbf{R}$ ) dei seguenti insiemi:

1.  $(-\infty, 0)$
2.  $\mathbf{R}$
3.  $\mathbf{R}^+$
4.  $\mathbf{R}^-$
5.  $[0, 1]$
6.  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
7.  $[2, +\infty) \cup [-1, 1]$
8.  $\{x \in \mathbf{R} : x^2 > 5\}$
9.  $\mathbf{R} - (0, 3)$
10.  $\{x \in \mathbf{R} : x^2 < x\}$

**2.13.** Dimostrare che

$$(a, b) \cap (c, d) = \begin{cases} (\max\{a, c\}, \min\{b, d\}) & \text{se } c < b \text{ e } a < d \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**2.14.** Dimostrare che se per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha  $a < b + \varepsilon$ , allora  $a \leq b$ .

**2.19.** Dimostrare che se l'insieme  $E$  ha minimo, l'estremo inferiore coincide col minimo.

**2.20.** Trovare l'estremo superiore dei seguenti insiemi, e dire se si tratta del massimo.

1.  $\{x \in \mathbf{R} : x^3 < 8\}$
2.  $\{x \in \mathbf{R} : x + 1 \geq 3x - 2\}$
3.  $\{x \in \mathbf{R} : x + 5 \leq 3x + 4\}$
4.  $\{x \in \mathbf{Q} : x^2 \leq 2\}$
5.  $(0, 1] \cup [2, 3]$
6.  $(-\infty, 4] \cap (1, 5)$
7.  $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$
8.  $\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots\right\}$
9.  $\{x \in \mathbf{R} : x^2 \text{ è razionale}\}$

**2.21.** Trovare l'estremo inferiore degli insiemi dell'esercizio precedente, e dire se si tratta del minimo.

**2.22.** Dimostrare che se  $A \subset B$ , allora  $\sup A \leq \sup B$  e  $\inf A \geq \inf B$ .

**2.23.** Calcolare i seguenti valori assoluti:

1.  $\left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right|$
2.  $|10^{10} - 5^{55}|$
3.  $|a - a^2 - 1|$
4.  $|\sqrt[4]{25} - \sqrt{5}|$
5.  $||x| - 1|$

**2.24.** Dimostrare che  $|x|^2 = x^2$ .

**2.25.** Dimostrare che  $|a| < r$  se e solo se  $-r < a < r$ .

**2.26.** Dimostrare che se  $a \leq b \leq c$ , allora  $|b| \leq \max\{-a, c\}$ .

**2.27.** Risolvere le disequazioni:

1.  $x + |x| < 2$
2.  $x|x| > 4x + 1$
3.  $x^2 - 2|x| - 3 < 0$
4.  $x^2 < |x| - 2$
5.  $|x + 3| - |x - 1| \leq 0$
6.  $\frac{|x - 3|}{|2x + 1|} \geq \frac{1}{2}$
7.  $\frac{||x| - 3|}{|x - 3|} < 2$
8.  $\frac{1}{2x} + |2x - 1| < 2$
9.  $1 + \sqrt{2x^2 + 3x - 2} > x$
10.  $|x|^3 - 2x(1 + |x|) < 0$

**2.28.** Dimostrare che per ogni  $x, y \geq 0$  risulta  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ .

**2.29.** Dimostrare che per  $x < 1$  risulta  $\frac{1}{1-x} \geq 1 + x$ .