

1.1. Scrivere in forma esplicita i seguenti insiemi:

1. $\{x \in \mathbf{N} : 2 < x^2 < 11\}$
2. $\{x \in \mathbf{Z} : x^2 + 2x = 1\}$
3. $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2x = 1\}$
4. $\{x \in \mathbf{N} : 6 - x \geq 0\}$
5. $\{d \in \mathbf{Z} : 5 - d^2 \in \mathbf{N}\}$
6. $\{w \in \mathbf{R}^+ : 3w^2 - 1 = 6w\}$
7. $\{x \in \mathbf{Z} : x^2 < 16\}$
8. $\{x \in \mathbf{N} : 3x < x + 8\}$
9. $\left\{x \in \mathbf{Z} : \frac{1}{7} < 2^x < 3\right\}$
10. $\{x \in \mathbf{R} : x^2 - 2ax + 4 = 0\}$

1.2. Elencare i sottoinsiemi degli insiemi seguenti:

1. $\{0, 1\}$
2. $\{x \in \mathbf{N} : x^3 < 10\}$
3. $\emptyset$
4. $\{\emptyset\}$
5. $\{-1\}$
6. 4
7. $\{x \in \mathbf{R}^- : x^3 = 8x\}$
8. $\{1, 4, -1\}$
9. $\{u \in \mathbf{Q}^+ : u^2 = u^3\}$
10. $\{d \in \mathbf{N} : 3 < d < 8, d \text{ è primo}\}$

1.3. Calcolare l'unione $A \cup B$, l'intersezione $A \cap B$ e la differenza $A - B$ dei seguenti insiemi:

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5\}$
2. $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 5, 9, 21\}$
3. $A = \{x \in \mathbf{Z} : x^2 < 10\}, B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 < 10\}$
4. $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x = 2\}, B = \mathbf{R}^-$
5. $A = \{x \in \mathbf{N} : x^2 < 15\}, B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 > 10\}$
6. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 2, 1\}$
7. $A = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 = 2\}, B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 = 2\}$

1.4. Calcolare $A \cap (B \cup C)$, $(A - B) \cap C$ e $(A \cup B) - C$ nei casi seguenti:

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 3, 4\}$
2. $A = \{-1, 0, 1, 2\}, B = \{-1, 2, 3\}, C = \{2, 3, 4\}$
3. $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{Q}^+, C = \mathbf{Z}$
4. $A = \mathbf{R}, B = \emptyset, C = \{1\}$
5. $A = \{0\}, B = \emptyset, C = \mathbf{R}$

1.5. Tramite i relativi diagrammi di Eulero-Venn visualizzare le relazioni seguenti:

1. $A - (A - B) = A \cap B$
2. $A \cup (B - A) = A \cup B$
3. $(A \cap B) \cup (A - B) = A$
4. $(A \cup B) - A = B - A$
5. $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$
6. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

Notazione: data una proposizione $\mathcal{P}$, si indica con $\neg \mathcal{P}$ la sua negazione.

Esempio: se $\mathcal{P}$ è la proposizione “Tutte le pecore sono nere”, $\neg \mathcal{P}$ è la proposizione “Esiste almeno una pecora non nera”.

1.6. Sia $\mathcal{P} = “(-3)^2 = -3^2”$ e $\mathcal{Q} = “5 \text{ è un numero primo}”$. Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

1. $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
2. $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
3. $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
4. $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
5. $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$
6. $\mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$
7. $\neg \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
8. $\neg \mathcal{P} \Rightarrow \neg \mathcal{Q}$
9. $\neg \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
10. $\neg \mathcal{P} \vee \neg \mathcal{Q}$
11. $\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{Q}$
12. $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\neg \mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q})$
13. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{Q}$

1.7. Se $\mathcal{P} = “La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti”$ e $\mathcal{Q} = “il prodotto di due numeri dispari è dispari”$, stabilire se le seguenti espressioni sono vere o false:

1. $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
2. $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
3. $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$
4. $\mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$
5. $\neg \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
6. $\neg \mathcal{P} \Rightarrow \neg \mathcal{Q}$
7. $\mathcal{P} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$
8. $\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}$
9. $\neg \mathcal{P} \vee \neg \mathcal{Q}$
10. $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\neg \mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q})$
11. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{P}$

1.8. Scrivere le seguenti espressioni per mezzo delle sole $\neg, \vee$ e $\wedge$:

1. $\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
2. $* (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{P}$
3. $\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$

1.9. Scrivere le seguenti espressioni per mezzo delle sole $\neg$ e $\vee$:

1. $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$
2. $\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}$
3. $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$

1.10. Scrivere le seguenti espressioni per mezzo delle sole $\neg$ e $\wedge$:

1. $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$
2. $\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{Q}$
3. $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$

1.11. Siano $\mathcal{P}(x) : “x > 2”$ e $\mathcal{Q}(x) : “x^2 - x > 0”$ due predicati definiti in $\mathbf{R}$. Dire se sono vere o false le seguenti proposizioni:

1. $\mathcal{P}(0)$
2. $\mathcal{Q}(2)$
3. $\mathcal{P}(2)$
4. $\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{Q}(0)$
5. $\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{Q}(-1)$
6. $\mathcal{P}(0) \vee \mathcal{Q}(-1)$
7. $\neg \mathcal{P}(-1) \vee \mathcal{Q}(2)$
8. $\mathcal{Q}(3) \Rightarrow \mathcal{Q}(1)$
9. $\mathcal{Q}(3) \Rightarrow (\mathcal{Q}(1) \Rightarrow \mathcal{Q}(2))$

1.12. Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbf{R}$:

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| 1. $4x - 3 = 0$ | 7. $2x^2 - x - 2 = 0$ |
| 2. $3x + 1 = x$ | 8. $x^2 + 4x + 4 = 0$ |
| 3. $x + 2 = 3 + x$ | 9. $-x^2 + 2x + 1 = 0$ |
| 4. $4x - 3 = 3x + 2$ | 10. $x^3 - x^2 - 2x = 0$ |
| 5. $x^2 - 3x + 2 = 0$ | 11. $x^4 - 2x^2 = 3$ |
| 6. $3x^2 - 2x - 1 = 0$ | 12. $x = x $ |

1.13. Risolvere le seguenti disequazioni:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| 1. $3x + 2 > 0$ | 7. $x(1 - x) > 0$ |
| 2. $3 - x < 2 + x$ | 8. $x^2(1 - x) > 0$ |
| 3. $x + 3 < x - 1$ | 9. $x^2 + 3x + 2 < 0$ |
| 4. $2 - x \geq x - 3$ | 10. $3x^2 - 2x + 1 > 0$ |
| 5. $\frac{x+1}{x} < 0$ | 11. $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$ |
| 6. $\frac{2-x}{x-1} \geq 0$ | 12. $x^3 + x < 0$ |

1.14. Scrivere in maniera formale le seguenti proposizioni:

1. Esiste un numero naturale maggiore di 3.
2. Il quadrato di un numero naturale è maggiore del numero.
3. Esiste un numero reale più piccolo del suo cubo.
4. Esiste un numero naturale maggiore di tutti gli altri.
5. Ogni numero intero (positivo, negativo o nullo) è differenza di due numeri naturali.
6. Ogni numero reale è somma di due numeri razionali.
7. La sola soluzione reale dell'equazione $x + 3 = 0$ è -3 .
8. Il quadrato di un qualsiasi numero razionale è razionale.
9. Il quadrato di un qualsiasi numero irrazionale è irrazionale.
10. Il quadrato di qualche numero irrazionale è irrazionale.
11. Il quadrato di qualche numero irrazionale è razionale.
12. La radice cubica di un numero naturale è irrazionale.
13. Se $x^2 > 1$ allora $x > 1$.
14. Se $x > 1$ allora $x^2 > 1$.

1.15. Dire se le proposizioni precedenti sono vere o false.

1.16. Negare le proposizioni dell'esercizio 1.14.