

se  $b > 0$  e  $b \rightarrow 0$  potrei pensare

$$v(t) = \frac{gm}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$

$$= \frac{gm}{b} \left( 1 - \left( 1 - \frac{b}{m}t + o(b) \right) \right)$$

$$= \frac{gm}{b} \left( \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{b}{m}t + \dots \right)$$

$$= gt + \dots$$

Commento la stessa equazione può modellare situazioni diverse

$$u'(t) = k u(t) - m$$

$$k > 0$$

$$m > 0.$$

x ↓

$$v'(t) = -\frac{b}{m} v(t) + g$$

x ↑

$$v'(t) = \frac{b}{m} v(t) - g$$

Esercizio Trova la soluzione generale di

$$u'(t) = \frac{3}{t} u(t) + t^2 + 1.$$

Cerco soluzioni su  $]0, +\infty[$ .

$$a(t) = \frac{3}{t}$$

$$A(t) = \int \frac{3}{t} dt = 3 \log t$$

quindi  $u(t) = C e^{A(t)} = C e^{3 \log t} = C t^3.$

*soluzioni della omogenea.*

cerco sol. part  $u_p(t) = c(t) t^3.$

$$\underbrace{c'(t) t^3 + c(t) 3t^2}_{u_p'} = \frac{3}{t} \underbrace{c(t) t^3}_{u_p} + t^2 + 1$$

$$c'(t) = \frac{t^2 + 1}{t^3}$$

$$c(t) = \int \frac{t^2 + 1}{t^3} dt = \int \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} dt$$

$$= \log t + \frac{t^{-2}}{-2}$$

$$= \log t - \frac{1}{2t^2}$$

$$u_p(t) = \left( \log t - \frac{1}{2t^2} \right) t^3$$

$$= t^3 \log t - \frac{1}{2} t.$$

sol. gen.  $u(t) = \underbrace{t^3 \log t - \frac{1}{2} t}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{C t^3}_{\text{sol. omog.}}$

## EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Modello popolazione con tasso crescita  $k > 0$

$$u'(t) = k u(t) \quad (\text{Malthus})$$

Modello logistico: risorse limitate

$\Rightarrow$   $k$  non è costante

$$\leadsto k(u) = k \left(1 - \frac{u}{M}\right)$$

$M =$  "capacità massima del sistema".

L'equazione  $u' = k \left(1 - \frac{u}{M}\right) u$

$$u'(t) = k \left(1 - \frac{u(t)}{M}\right) u(t)$$

$$u'(t) = k u(t) - \frac{k}{M} u(t)^2$$

Equazione del 1° ordine non lineare

$$u'(t) = \Phi(t, u(t))$$

depende da  $u$   
non linearmente.

VARIABILI SEPARABILI

$$\Phi(t, u) = f(t) g(u)$$

esempi:

$$u' = t^2 (u^2 + 1) \quad \bar{e} \text{ a var sep.}$$

$$u' = \sin(tu) \quad \text{non } \bar{e} \text{ var sep.}$$

$$u' = ku - \frac{k}{M} u^2 \quad \bar{e} \text{ a var sep.}$$

$f(t) \equiv 1.$

studiamo equazioni del tipo

$$u' = f(t) g(u)$$

$$u'(t) = f(t) g(u(t)).$$

$$u' = f(t) g(u) \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dt} = f(t) g(u)$$

$$\rightarrow \int \frac{du}{g(u)} = \int f(t) dt$$

Se  $F(t)$  primitiva di  $f(t)$  !  
 $G(u)$  primitiva di  $\frac{1}{g(u)}$  ↖  $G$  non  
 è prim  
 di  $g$

$$G(u) = F(t) + c$$

$$G(u(t)) = F(t) + c$$

ma di  
 $\frac{1}{g}$ .

invertendo  $G$  (se possibile)

$$u(t) = G^{-1}(F(t) + c) \quad \dots$$

Esempio Trovare la soluzione generale di

$$u'(t) = t u(t) + t$$

1° ord lineare

$$u' = t u + t$$

$a(t) = t$ ,  $b(t) = t$

$$u' = t(u+1)$$

→ a var sep.

$$f(t) = t$$

$$g(u) = u+1.$$

$$\frac{du}{dt} = t(u+1)$$

$$\int \frac{du}{u+1} = \int t dt$$

$$\log |u+1| = \frac{t^2}{2} + c$$

$$\log |u(t)+1| = \frac{t^2}{2} + c$$

$$|u(t)+1| = e^{\frac{t^2}{2} + c}$$

↪ valutare se  $u(t) > -1$  o  $u(t) < -1$

oppure se  $u(t) = -1$  per qualche  $t$ .

Ipotesi

$$u(t) > -1$$

⇒

$$u(t)+1 = e^{\frac{t^2}{2} + c_1}$$

$$u(t) = -1 + e^{\frac{t^2}{2} + c_1}$$

$$u(t) = -1 + e^{c_1} e^{\frac{t^2}{2}} \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Ipotesi:

$$u(t) < -1$$



$$-u(t) - 1 = e^{t^2/2 + C_2}$$

$$u(t) = -1 - e^{t^2/2 + C_2}$$

$$u(t) = -1 - e^{C_2} \cdot e^{t^2/2} \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nota che  $u(t) \equiv -1$  (not.  $u(t) = -1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ )  
è una soluzione.

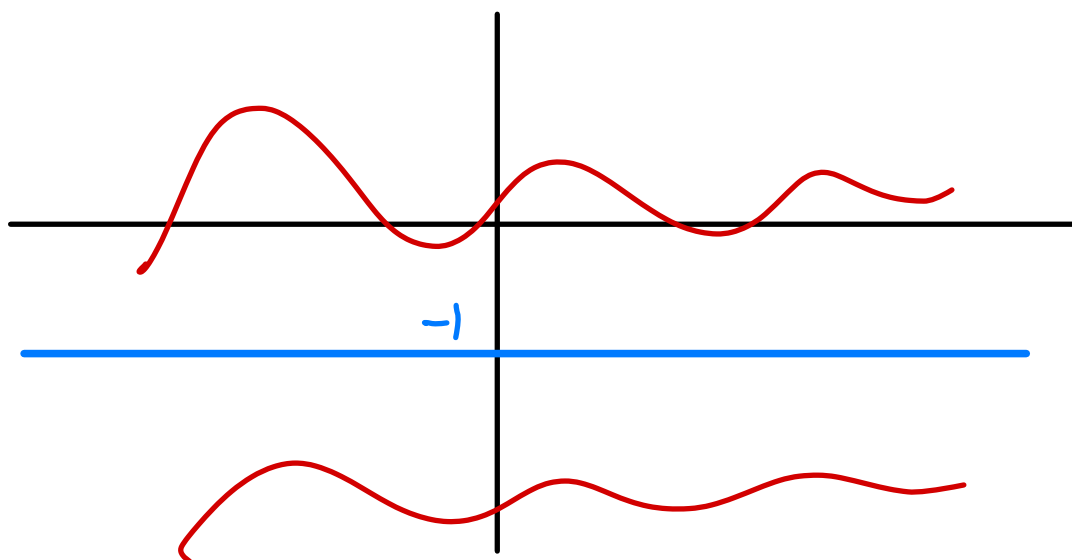
Tutte le soluzioni:  $u(t) = -1 + k e^{t^2/2}; \quad k \in \mathbb{R}$

Ⓢ Usando il metodo della sett. scorsa

$$(H) \quad u' = t u \quad \leadsto \quad u(t) = k e^{t^2/2}$$

$$(E) \quad \text{sol. part} \quad u_p(t) = -1$$

Trovare le stesse soluzioni!

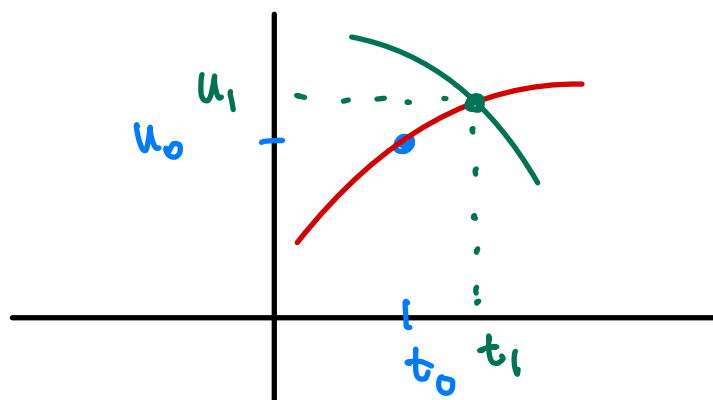


## Teorema (di Cauchy)

Se considero un problema di Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} u' = \Phi(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

con  $\Phi(t, u)$  di classe  $C^1$ . Allora  
(PC) ammette una soluzione unica  
(def. su un certo intervallo)



Ritorniamo alle eq. var separabili.

$$u' = f(t) g(u)$$

$$u'(t) = f(t) g(u(t))$$

suppongo che  $u(t)$  sia una soluzione  
con  $g(u(t)) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ .

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t)$$

perché  
 $g(u(t)) \neq 0$   
 per  $t \in I$ .

$$\int \frac{u'(t)}{g(u(t))} dt = \int f(t) dt$$

↑  
 cambio var.  $z = u(t)$   $dz = u'(t) dt$ .

$$\int \frac{dz}{g(z)} = \int f(t) dt.$$

Perché posso giustificare  $g(u(t)) \neq 0 \forall t \in I$

Portiamo al problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t) g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Se  $g(u_0) = 0$  allora

$u(t) \equiv u_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$  è una soluzione.

Trovo quindi tutte le sol. costanti  
 (risolvendo  $g(u) = 0$ )

e tutte le altre sodd  $g(u(t)) \neq 0 \quad \forall t$ .

### Esempio (blow-up)

Vogliamo risolvere

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad u_0 \in \mathbb{R},$$

è a var sep.  $u' = f(t) g(u)$

$$f(t) = 1 \quad g(u) = u^2$$

$$g(u) = 0 \iff u^2 = 0 \implies u_0 = 0$$

sol. costante

$$u(t) \equiv 0.$$

Però ipotizziamo  $u(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ .

$$u' = u^2 \implies \frac{du}{dt} = u^2$$

$$\implies \int \frac{du}{u^2} = \int dt$$

$$\implies \boxed{-\frac{1}{u(t)} = t + c}$$

→ sostituisco  $u(0) = u_0$ .

← tutte le soluzioni diverse da  $u(t) \equiv 0$  soddisfanno questa.

$$-\frac{1}{u_0} = 0 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{u_0}.$$

$$-\frac{1}{u(t)} = t - \frac{1}{u_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - t}}$$

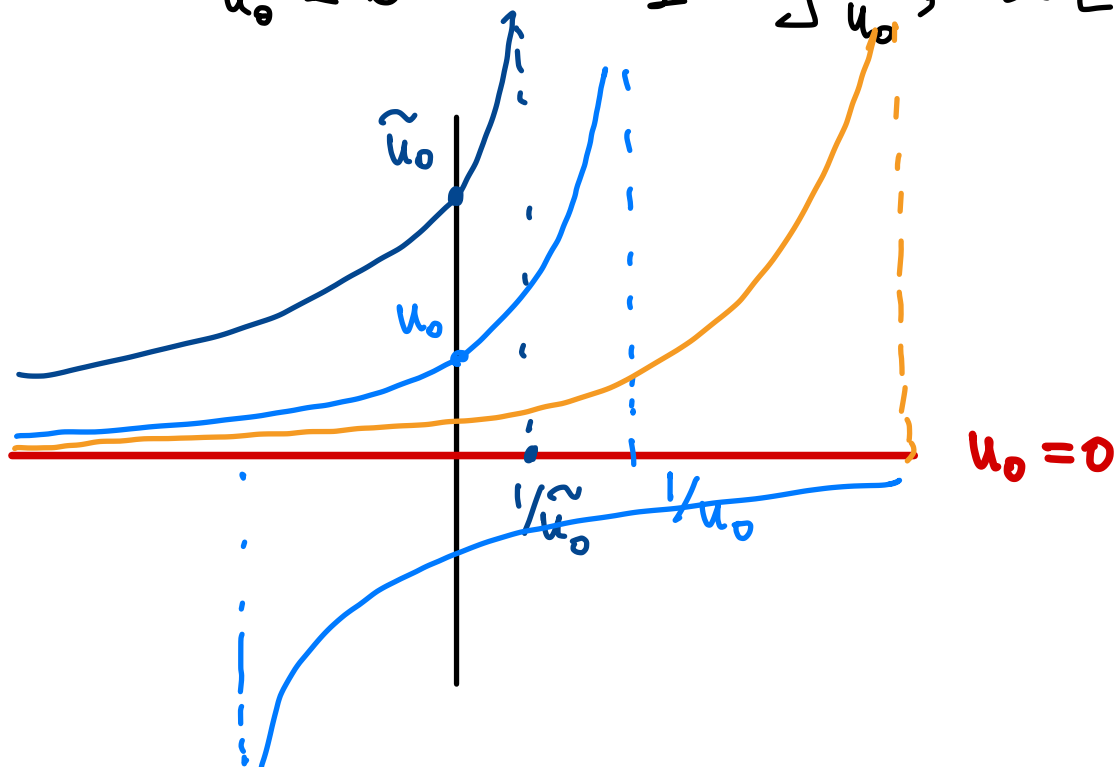
non è def per tutti i  $t \in \mathbb{R}$ .

l'intervallo più grande in cui la sol  
è definita e che contiene  $t=0$

$$u_0 > 0 \quad I = ]-\infty, \frac{1}{u_0}[$$

$$u_0 = 0 \quad I = \mathbb{R}$$

$$u_0 < 0 \quad I = ]\frac{1}{u_0}, +\infty[.$$



## Esempio (equazione logistica)

Variante del modello popolazione  
 con risorse limitate

$$u' = k u \left( 1 - \frac{u}{M} \right)$$

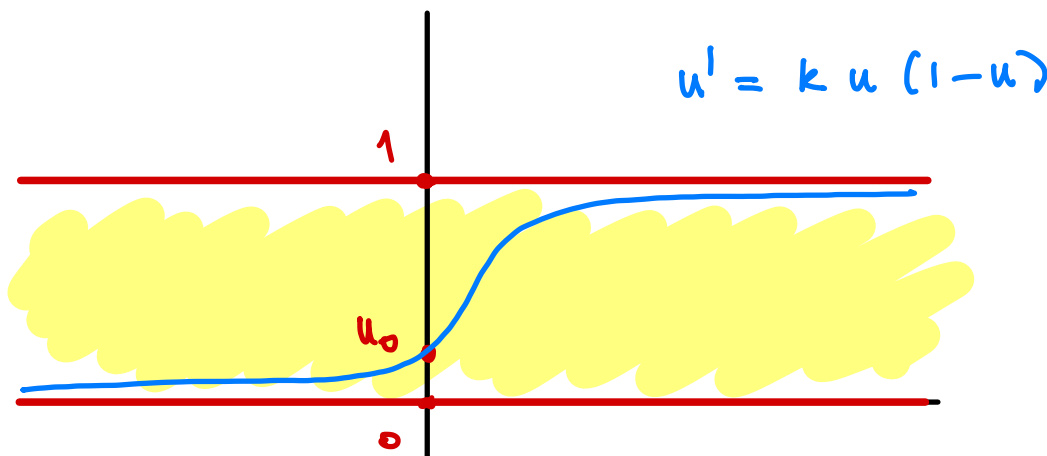
per semplicità prendo  $M = 1$ .

$$u' = k u (1 - u)$$

è a var sep.  $f(t) = k$   
 $g(u) = u(1-u)$

$$g(u) = 0 \iff u = 1 \text{ o } u = 0.$$

soluzioni costanti.



vorrei trovare la sol per  $u_0 \in ]0, 1[$ .

$$\frac{du}{dt} = k u (1 - u) \implies \frac{du}{u(1-u)} = k dt.$$

$$\int \frac{du}{u(1-u)} = kt + c$$

$$\int \frac{du}{u(1-u)} = ? \quad \frac{1}{u(1-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u}$$

$$1 = A(1-u) + Bu$$

$$1 = A + (B-A)u$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B-A=0 \end{cases} \Rightarrow A=B=1.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u(1-u)} &= \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{1-u} du \\ &= \log|u| - \log|1-u|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u > 0 \\ u < 1 \end{aligned} \quad &= \log u - \log(1-u)$$

$$= \log\left(\frac{u}{1-u}\right).$$

$$\log\left(\frac{u(t)}{1-u(t)}\right) = kt + c$$

qui inserisco  
la condizione  
iniziale.

$$u(0) = u_0 \Rightarrow \log \frac{u_0}{1-u_0} = c$$

$$\hookrightarrow e^c = \frac{u_0}{1-u_0}.$$

$$\frac{u(t)}{1-u(t)} = e^{kt+c} = e^{kt} \cdot e^c$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u(t)}{1-u(t)} = \frac{u_0}{1-u_0} \cdot e^{kt}}$$

dero inverse  $\frac{u}{1-u} = x$

$$u = x - ux$$

$$u + ux = x \quad u(1+x) = x \Rightarrow u = \frac{x}{1+x}$$

$$u(t) = \frac{\frac{u_0}{1-u_0} e^{kt}}{1 + \frac{u_0}{1-u_0} e^{kt}}$$

$$= \frac{u_0 e^{kt}}{(1-u_0) + u_0 e^{kt}}$$

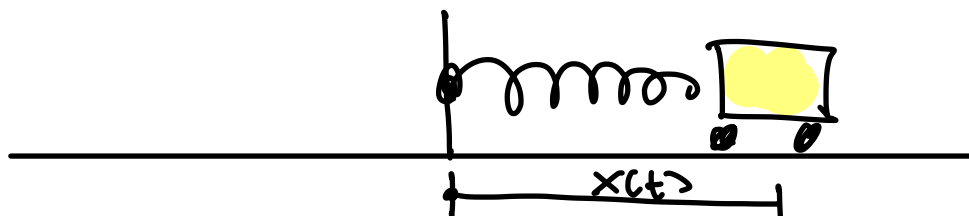
$$= \frac{u_0}{(1-u_0)e^{-kt} + u_0}$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 1$   
 $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$

$$\boxed{k > 0}$$

## EQUAZIONI DEL 2° ORDINE LINEARI COEFF COST

Esempio cardine: oscillatore armonico  
con attrito



$$m a = F$$

$$m x''(t) = \underbrace{-k x(t)}_{\text{f. elastica}} - \underbrace{h x'(t)}_{\text{attrito.}}$$

$$m x''(t) + h x'(t) + k x(t) = 0.$$

Caso generale

$$a u''(t) + b u'(t) + c u(t) = 0.$$

Quando  $u(t) = e^{\lambda t}$  è soluzione?

$$u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$a \lambda^2 e^{\lambda t} + b \lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0$$

$$(a \lambda^2 + b \lambda + c) e^{\lambda t} = 0.$$

$$\text{se } \lambda \in \mathbb{R} \text{ è t.c. } a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

allora  $e^{\lambda t}$  è una soluzione.

Data  $a u''(t) + b u'(t) + c u(t) = 0 \quad (H).$

chiamo  $a z^2 + b z + c = 0 \quad (EC)$

equazione caratteristica associata

Fatto:  $\lambda \in \mathbb{R}$  soluzione di (EC)

allora  $u(t) = e^{\lambda t}$  soluzione di (H)

Osservazione: Se  $u_1(t), u_2(t)$  sono soluzioni di (H) allora per ogni  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$   
 $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$  è soluzione di (H)

Proposizione L'insieme delle soluzioni di

$$a u''(t) + b u'(t) + c u(t) = 0 \quad (H)$$

$$a \neq 0$$

è uno spazio vettoriale di dim 2.

È determinato come segue

(i)  $b^2 - 4ac > 0$ , dette  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  le sol. reali distinte di (EC)

$$S_H = \{ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}.$$

(ii)  $b^2 - 4ac = 0$ , detta  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'unica soluzione reale di (EC)

$$S_H = \left\{ c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\parallel$   
 $(c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$

(iii)  $b^2 - 4ac < 0$ , sia  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$  le soluzioni di (EC).

$$S_H = \left\{ c_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \cos(\beta t) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \\ &= e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{aligned}$$

Oss (perché  $\dim 2$ ?)

(H)  $a u'' + b u' + c u = 0$

$a \neq 0$

pongo  $x = u$   $y = u'$

ovviamente  $x' = y$

molte  $y' = u'' = -\frac{c}{a} u - \frac{b}{a} u' = -\frac{c}{a} x - \frac{b}{a} y$

cioè

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y \end{cases} \iff (H).$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$z' = A z \quad \text{dove } z = (x, y).$$

autovalori di  $A$        $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} - \lambda \end{pmatrix} &= -\lambda \left(-\frac{b}{a} - \lambda\right) + \frac{c}{a} \\ &= \lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0 \iff_{a \neq 0} a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

esempio

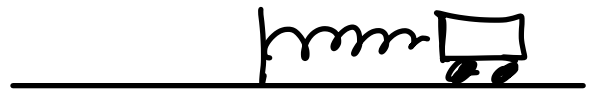
$$u'' - u = 0 \quad (H)$$

$$z^2 - 1 = 0 \quad (EC)$$

(EC) ha sol  $\pm 1$

$$S_H = \{ c_1 e^t + c_2 e^{-t} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Applicazione al caso



$m, h, k > 0$

$$m x''(t) + h x'(t) + k x(t) = 0$$

minimo  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$   $a = \frac{h}{2m}$

$$(H) \quad x''(t) + 2a x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$(EZ) \quad z^2 + 2a z + \omega_0^2 = 0$$

caso senza attrito  $h=0 \Rightarrow a=0$

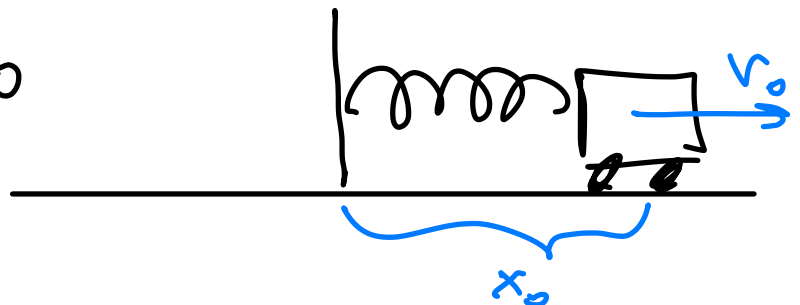
$$(EZ) \quad z^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \leadsto \quad \pm i \omega_0 \text{ soluzioni}$$

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

sol. periodiche di freq.  $\omega_0$ .

condizioni iniziali

$$\begin{cases} x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$



$$x_0 = x(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = c_1}$$

$$\omega_0 c_2 = x'(0) = v_0 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{v_0}{\omega_0}}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

periodo  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ .

caso con attrito  $a \neq 0$

$$(EG) \quad z^2 + 2a z + \omega_0^2 = 0$$

$$z = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_0^2}.$$

possi casi :

|                    |                 |
|--------------------|-----------------|
| $a^2 > \omega_0^2$ | attrito forte   |
| $a^2 = \omega_0^2$ | attrito critico |
| $a^2 < \omega_0^2$ | attrito debole. |

(a) attrito forte : ho due sol. reali

$$\lambda_1 = -a - \sqrt{a^2 - \omega_0^2} \quad \lambda_2 = -a + \sqrt{a^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = c_1 e^{(-a - \sqrt{a^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{(-a + \sqrt{a^2 - \omega_0^2})t}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad \text{conv. exp verso } 0.$$

(c) attrito debole : (EG) ha due sol.

$$\lambda_{1,2} = -a \pm i \sqrt{\omega_0^2 - a^2} \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - a^2$$

$$= -a \pm i \omega_1.$$

$$\omega_1 < \omega_0$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= c_1 e^{-at} \cos(\omega_1 t) + c_2 e^{-at} \sin(\omega_1 t) \\
 &= e^{-at} (c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)) .
 \end{aligned}$$

$\downarrow$   
 exp  
 negativo .
 

 oscillazioni in  
 periodo  $2\pi/\omega_1$  .

② Cosa succede se voglio risolvere

$$u'' - u = e^t \quad (E)$$

o no  $u'' - u = 0 \quad (H)$

$$S_H = \{c_1 e^t + c_2 e^{-t} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

quindi mi serve solo una sol. particolare.

$u_p$  di (E) per poter dire

$$s_E = u_p + S_H .$$

## CASO NON OMogeneo

Studiamo per  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$

$$a u''(t) + b u'(t) + c u(t) = f(t)$$

con delle funzioni  $f(t)$  del tipo

$$f(t) = P(t) e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$f(t) = Q(t) e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

dove  $P(t)$ ,  $Q(t)$  sono polinomi.

$$f(t) = c \quad \text{cost.}$$

$$\text{con particolari: } f(t) = P(t) \quad \text{pol.}$$

$$f(t) = e^{\alpha t} \quad \text{exp.}$$

$$f(t) = \cos(\beta t) \quad \text{trig.}$$

idea: metodo di somiglianza

cerco una soluzione nella stessa forma.

$$u_p(t) = M(t) e^{\alpha t} \cos(\beta t) + N(t) e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

in generale servono entrambi se  $\beta \neq 0$   
altrimenti per  $\beta = 0 \Rightarrow M(t) e^{\alpha t}$ .

dove  $M(t)$  e  $N(t)$  sono polinomi dello  
stesso grado di  $P(t)$  o  $Q(t)$ .

se  $\mu = \alpha + i\beta$  non è soluzione di (EC)

altrimenti: se  $\mu = \alpha + i\beta$  è sol. semplice di (EC)

$$u_p(t) = t \left( M(t) e^{\alpha t} \cos(\beta t) + N(t) e^{\alpha t} \sin(\beta t) \right)$$

se  $\mu = \alpha + i\beta$  è sol. doppia di (EC)

$$u_p(t) = t^2 \left( M(t) e^{\alpha t} \cos(\beta t) + N(t) e^{\alpha t} \sin(\beta t) \right)$$

esempio

$$u'' - u = e^t$$

$$(EC) \quad z^2 - 1 = 0 \quad \leadsto \quad \pm 1.$$

il termine noto  $e^t = 1 \cdot e^{1t} \cdot \cos(0t)$

$\swarrow$   $\searrow$   
 $\cos t$   $\alpha=1$   $\beta=0$

$1 + 0i = 1$  è sol di (EC)? Sì, semplice.

Quindi cerco  $u_p(t) = t \cdot M(t) \cdot e^t$

$\uparrow$   $\bar{c}$  costante.

$$u_p(t) = A t e^t \quad \text{e cerco } A \in \mathbb{R} \text{ tale sol.}$$

$$u' = A e^t + A t e^t$$

$$u'' = A e^t + A e^t + A t e^t = 2A e^t + A t e^t$$

$$u'' - u = 2A e^t + A t e^t - A t e^t = e^t$$

$$\cos e^{-} \quad 2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$\text{quindi} \quad u_p(t) = \frac{1}{2} t e^t.$$

Esempio  $u'' + 2u' + u = t e^{-t} \quad (E)$

$$(EC) \quad z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$\cos e^{-} \quad (z+1)^2=0 \Rightarrow -1 \text{ sol. doppia.}$$

$$S_H = \left\{ c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Cerco una sol. particolare: noto che

$$f(t) = t e^{-t} = P(t) e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \text{deg } 1. \end{array} \quad \alpha = -1 \quad \beta = 0$$

$$\alpha + i\beta = -1 \quad \bar{e} \text{ sol. doppia di } (EC)$$

$$\text{quindi cerco } u_p(t) = t^2 (At+B) \cdot e^{-t}.$$

$$u_p(t) = (At^3 + \cancel{Bt^2}) e^{-t}$$

$$\begin{aligned} u_p'(t) &= (3At^2 + \cancel{2Bt}) e^{-t} \\ &\quad - (At^3 + \cancel{Bt^2}) e^{-t}. \end{aligned}$$

$$= (-At^3 + (\cancel{-B} + 3A)t^2 + \cancel{2Bt}) e^{-t}$$

$$\begin{aligned}
 u_p(t) &= (-3At^2 + 2(-\cancel{B} + 3A)t + \cancel{2B}) e^{-t} \\
 &\quad - (-At^3 + (-\cancel{B} + 3A)t^2 + \cancel{2B}t) e^{-t} \\
 &= [At^3 + (-\cancel{B} - 6A)t^2 + (-\cancel{4B} + 6A)t + \cancel{2B}] e^{-t}
 \end{aligned}$$

osservando il termine noto si può vedere che deve essere  $B=0$

... completando il calcolo  $A = \frac{1}{6}$ .

## RISONANZA

oscillatore armonico forzato

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = H \cos(\omega t).$$

oscillatore  
armonico  
frequenza  $\omega_0$

forza esterna  
periodica  
frequenza  $\omega$ .

$$S_H = \{ c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Caso  $\omega = \omega_0$

$$f(t) = H \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 p(t) & e^{\alpha t} & \cos(\beta t) \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \deg 0 & \alpha = 0 & \beta = \omega_0.
 \end{array}$$

$\alpha + i\beta = i\omega_0$  è sol di (EC)  $\Rightarrow$  S1! sol. sempl.

cerco una sol. particolare della forma

$$u_p(t) = t \left( A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \right).$$

ora vorrei calcolare  $u_p''$  e imporre.

$$u'' + \omega_0^2 u = H \cos(\omega_0 t).$$

facendo i calcoli:  $A = 0$   $B = \frac{H}{2\omega_0}$

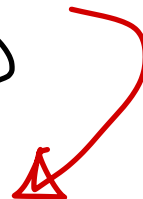
sol. particolare  $u_p(t) = \frac{H}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$

questa funzione soddisfa

$$u_p(0) = 0 \quad \text{e} \quad u_p'(0) = 0.$$

la  $u_p$  è soluzione di **UNICA**

$$\begin{cases} x''(t) + \omega_0^2 x(t) = H \cos(\omega_0 t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}.$$



$$\frac{H}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

