

INTEGRAZIONE PER PARTI

Ricordiamo che

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

allora

$$\int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + c$$

Teorema (di integrazione per parti)

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

(cioè derivabili, con derivata continua)

Allora

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

posso "scaricare" la derivata di f su g .

Un modo pratico di applicare la formula

$$\int_a^b u(x)v(x) dx = \left[U(x)v(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b U(x)v'(x) dx$$

basta prendere $u = f'$ e $g = v$.

dove U è primitiva di u .

Esempio

Calcolare

$$\int_0^1 x e^x dx$$

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{v'} \underbrace{e^x}_v dx = \left[\underbrace{x}_{v'} \underbrace{e^x}_v \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{e^x}_v dx$$

$$= (e - 0) - \left[e^x \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= e - (e - 1) = 1.$$

Ma qual'è una primitiva di $x e^x$

$$\int \underbrace{x}_{v'} \underbrace{e^x}_v dx = \underbrace{x}_{v'} \underbrace{e^x}_v - \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{e^x}_v dx$$

$$= x e^x - e^x + c$$

$$= (x-1) e^x + c.$$

Esempio

Trovare una primitiva di
 $f(x) = \arctan x$.

$$\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan x}_v dx = \underbrace{x}_{v'} \underbrace{\arctan x}_v - \int \underbrace{x}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{v'} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) dx + C$$

Esercizio • Calcolare una primitiva di $\log x$, $\arcsin x$

- Avendo calcolato $\int x e^x dx$, calcolare $\int x^2 e^x dx$ e poi $\int x^3 e^x dx$.

Esempio $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$

Inizio cercando la primitiva

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot (-\sin x) dx \\ &= \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x dx \quad (*) \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= -\cos x \sin x - \int (-\cos x) \cdot \cos x dx \\ &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx. \end{aligned}$$

Questo argomento è circolare e non conclude nulla. Possa da (*) fare così:

$$\int \sin^2 x dx = \int 1 - \cos^2 x dx = x - \int \cos^2 x dx.$$

mettendo insieme

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x + c$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x) + c$$

Esempio $\int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx$ $\Delta \sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$$\begin{aligned} I &= \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx = x \sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + c \end{aligned}$$

$$2I = x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x + c.$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$$

INTEGRALE PER SOSTITUZIONE

Abbiamo già visto che posso dire

$$\int \phi'(x) e^{\phi(x)} dx = e^{\phi(x)} + C \quad (*)$$

perché $D e^{\phi(x)} = \phi'(x) e^{\phi(x)}$

Può in generale se io ho una $f(x)$ che ammette primitiva $F(x)$ allora

$$\begin{aligned} D(F(\phi(x))) &= F'(\phi(x)) \phi'(x) \\ &= f(\phi(x)) \phi'(x) \end{aligned}$$

(il caso (*) è con $F(y) = e^y$)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx &= [F(\phi(x))]_{x=a}^{x=b} \\ &= F(\phi(b)) - F(\phi(a)). \end{aligned}$$

ma

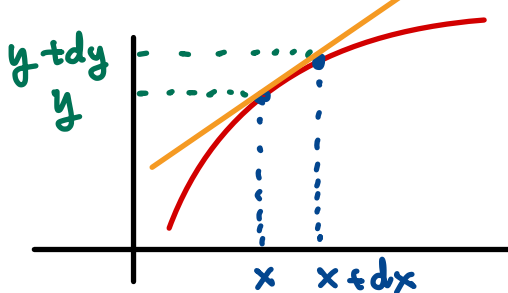
$$F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = [F(y)]_{y=\phi(a)}^{y=\phi(b)}$$

$$= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y) dy.$$

Posso pensare $y = \phi(x)$ e $dy = \phi'(x) dx$

noi

$$\frac{dy}{dx} = \phi'(x)$$



Teorema (cambio di variabile)

Sia $\phi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ biunivoca e di classe C^1 , se $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

è continua, allora

$$\int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y) dy$$

$$y = \phi(x) \quad dy = \phi'(x) dx.$$

esempio

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_1^e \frac{dy}{1+y^2}$$

$$y = e^x$$

$$dy = e^x dx$$

$$= \arctan y \Big|_{y=1}^{y=e}$$

$$= \arctan e - \frac{\pi}{4}.$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y = \arctan e^x + c.$$

qui c'era esplicito il $\phi'(x) dx$... in generale?

Esempio $\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} dx = (*)$

$$y = \sqrt{1+x} \longrightarrow y^2 = 1+x$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx$$

OK ma...

$$x = y^2 - 1$$

$$dx = 2y dy.$$

$$(*) = \int \frac{1}{1+y} \cdot 2y dy$$

$$= 2 \int \frac{y+1}{1+y} dy - 2 \int \frac{1}{1+y} dy$$

$$= 2y - 2 \log|1+y| + c.$$

$$= 2\sqrt{1+x} - 2 \log(1+\sqrt{1+x}) + c$$

Esempio $\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} dx = (*)$

$$y = \sqrt{1+x^2}.$$

$$y^2 = 1+x^2$$

$$x^2 = y^2 - 1$$

$$x = \sqrt{y^2 - 1}$$

suppongo

$$x \geq 0$$

$$dx = \frac{-2y}{2\sqrt{y^2-1}} dy$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{y^2-1}} dy.$$

$$(*) = \int \frac{1}{1+y} \cdot \left(-\frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \right) dy = \dots ?$$

qui ho $\sqrt{P(x)}$ con $P(x)$ di grado 2
con $\Delta < 0$. Qui è $\sqrt{1+x^2}$.

In questi casi è utile porre:

$$1+x^2 = (x+u)^2 \quad \leftarrow u \text{ definita implicitamente}$$

$$1+x^2 = x^2 + 2xu + u^2$$

$$\frac{1-u^2}{2u} = x$$

$$dx = \left(\frac{1-u^2}{2u} \right)' du$$

$$= \frac{(-2u) \cdot 2u - (1-u^2) \cdot 2}{4u^2} du$$

$$= \frac{-2u^2 - 2}{4u^2} du = -\frac{1+u^2}{2u^2} du.$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{1+(x+u)} \cdot dx$$

$$= \int \frac{1}{1+\left(\frac{1-u^2}{2u} + u\right)} \cdot \left(-\frac{1+u^2}{2u^2} \right) du$$

$$= \int \frac{1}{1+\frac{1+u^2}{2u}} \cdot \left(-\frac{1+u^2}{2u^2} \right) du$$

$$= - \int \frac{\cancel{2u}}{2u+1+u^2} \cdot \frac{1+u^2}{\cancel{2u^2}} du$$

$$= - \int \frac{1+u^2}{u(u+1)^2} du. \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{qui } \deg N(x) \\ \hat{=} 2 \\ \deg D(x) = 3. \end{array}$$

Questa sostituzione ci riconduce a
primitive di funzioni razionali
ovvero del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ con

$N(x)$, $D(x)$ polinomi di grado opportuno. Che fare?

1^o step: mi riconduco al caso in cui
 $\deg N(x) < \deg D(x)$.

In fatti se $\deg N(x) \geq \deg D(x)$
 posso fare la divisione euclidea

Ovvero trovare polinomi $Q(x)$, $R(x)$ tali che

$$N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

con $\deg R(x) < \deg D(x)$.

$$32 = 6 \cdot 5 + 2$$

dividiamo x^3 per $x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + 0x + 0 & x^2 + x + 1 \\ -x^3 - x^2 - x & \underline{x - 1} \\ \hline -x^2 - x & \\ -x^2 - x - 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$\nwarrow Q(x)$

$\nwarrow R(x)$

$$x^3 = (x-1)(x^2+x+1) + 1.$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+x+1} dx = \int (x-1) dx + \int \frac{1}{x^2+x+1} dx.$$

può in generale se

$$N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx.$$

1. Mi riduco a $\deg N(x) < \deg D(x)$
2. Ragiono sui vari casi di $\deg D(x) = 1, 2, 3, \dots$

- $\deg D(x) = 1$

$$\int \frac{c}{ax+b} dx = \frac{c}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx$$

$$= \frac{c}{a} \log |ax+b|$$

- $\deg D(x) = 2$

a) in cui il polinomio ha $\Delta < 0$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = (*)$$

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

l'idea è ricondursi a $\int \frac{1}{y^2+1} dy$
tramite cambi di variabile.

$$(*) = \int \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}} du = \frac{1}{\frac{3}{4}} \int \frac{1}{\frac{4}{3}u^2 + 1} du$$

$u = x + \frac{1}{2}$
 $du = dx$

cambio var $\frac{2}{\sqrt{3}} u = y$

ovvero $u = \frac{\sqrt{3}}{2} y \Rightarrow du = \frac{\sqrt{3}}{2} dy$.

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{y^2 + 1} \frac{\sqrt{3}}{2} dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan y = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} u \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right).$$

volendo posso ricordarmi

$$\int \frac{1}{y^2 + \beta^2} dy = \frac{1}{\beta} \arctan \left(\frac{y}{\beta} \right)$$

Può in generale se ho

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + x + 1} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} dx + b \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

lo so già!

$$= \frac{a}{2} \log |x^2 + x + 1| + \left(b - \frac{a}{2} \right) \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

Nel caso in cui $\Delta = 0$ o $\Delta > 0$
per un denom. di grado 2 avremo:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{a(x-\alpha)^2} dx$$

se $\Delta = 0$
ho due radici
reali coinc. d.

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x-\alpha)^2} dx$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{(x-\alpha)} \right)$$

quando invece $\Delta > 0$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)} dx$$

se $\Delta > 0$
ho due radici
reali distinte

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx$$

$$\alpha \neq \beta$$

Fatto: esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

$$1 = A(x - \beta) + B(x - \alpha)$$

$$1 = (A+B)x - A\beta - B\alpha$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A\beta - B\alpha = 1 \end{cases}$$

incognite A, B

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx &= A \int \frac{1}{x-\alpha} dx + B \int \frac{1}{x-\beta} dx \\ &= A \log|x-\alpha| + B \log|x-\beta|. \end{aligned}$$

Esempio $\int \frac{1}{x^4+1} dx$

In $\mathbb{C}$ l'equazione $x^4+1=0$ ovvero $x^4=-1$ ha 4 soluzioni:

(le radici 4^e di -1).

$$-1 = 1 e^{i\pi}$$

$$z^4 = 1 e^{i\pi}$$

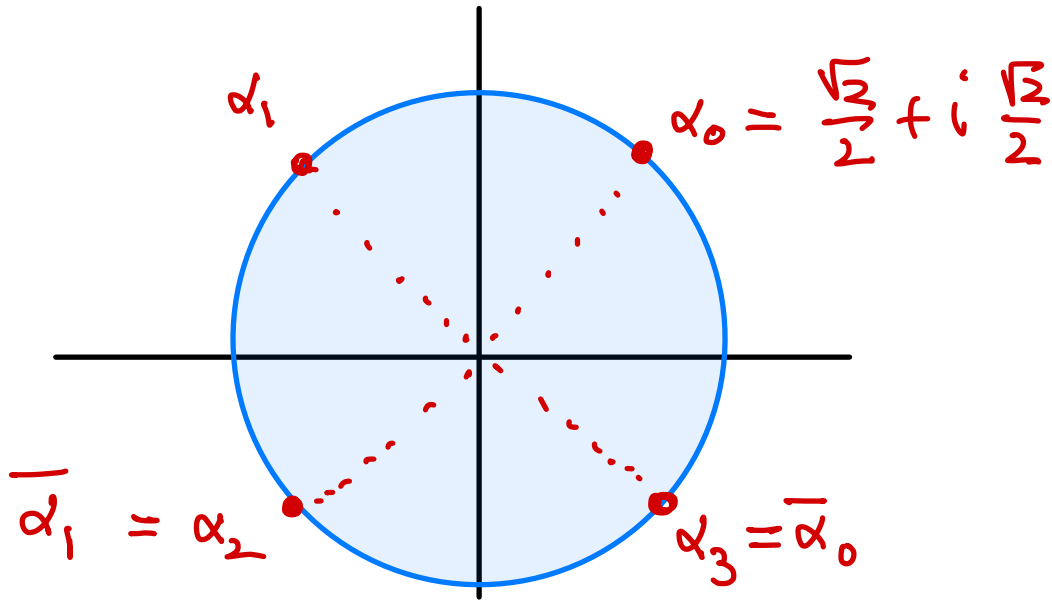
$$z = r e^{i\theta}$$

$$z^4 = r^4 e^{i4\theta}$$

$$\begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

cioè $\begin{cases} r=1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

le soluzioni $\alpha_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k)}$ $k=0,1,2,3$



$$\begin{aligned}x^4 + 1 &= (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \\&= (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1)(x - \bar{\alpha}_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) &= x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \\&= x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2.\end{aligned}$$

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx$$

Ora posso trovare $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\int \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx = \int \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$$

$$1 = (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$$\begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A + C = 0 \\ \dots \\ \dots \\ B + D = 1 \end{array} \right.$$

4 equazioni in
4 incognite
UNA UNICA SOLUZIONE!

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

$$\int \frac{1}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$x^2 = t$$

$$x = \sqrt{t}$$

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

Un'ultima caratteristica che si può ricondurre a primitive di funzioni razionali.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

e può in generale $\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx$

In questi casi è utile la sostituz.

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{ovvero} \quad x = 2 \arctan t$$

Infatti in questo caso

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

e

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} \text{ad es } \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \log|t| = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|. \end{aligned}$$

Integrali e sviluppi di Taylor

$$f(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

posso sviluppare $f'(x)$ come segue

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$

per $x \rightarrow 0$.

$$f(x) = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

Per essere precisi dovremmo dire

$$\underbrace{\arctan x}_{f(x)} - \underbrace{\arctan 0}_{f(0)=0} = \int_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{f'(t)} dt$$

$$= \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + o(t^6)) dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \int_0^x o(t^6) dt.$$

è vero che

$$\int_0^x o(t^6) dt = o(x^7) ?$$

Questo è vero: sia $\phi(t) = o(t^6)$

allora $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t)}{t^6} = 0$. (*)

ora $\psi(x) = \int_0^x \phi(t) dt$

$\psi(x) = o(x^7)$?

nota che $\psi'(x) = \phi(x)$ per il TFCT.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x)}{x^7} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi'(x)}{7x^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{7x^6} \stackrel{(*)}{=} 0.$$

In particolare se vo dero studiare una "funzione integrale" del tipo

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

può usare che $F'(x) = f(x)$
e usare le informazioni su f per dedurre quelle di F .

es. Calcolare lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$

di $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{(1+t^2)(1+t)} dt$.

$$F(0)=0 \quad F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

calcolo $F'(x)$. Come faccio ?

$$F(x) = G(x^2)$$

$$G(y) = \int_0^y \frac{1}{(1+t^2)(1+t)} dt$$

$$F'(x) = G'(x^2) \cdot 2x$$

stiamo dicendo $\frac{d}{dx} \int_0^{\alpha(x)} f(t) dt = f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$

$$F'(x) = 2x \cdot \frac{1}{(1+x^4)(1+x^2)}$$

$$= 2x \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2x (1 - x^4 + o(x^4)) \cdot (1 - x^2 + x^4 + o(x^4))$$

$$= 2x - 2x^3 + o(x^5)$$

$$F(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^6) .$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

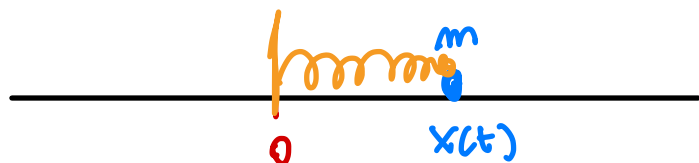
Una equazione differenziale è una relazione del tipo

$$\Phi(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) = 0$$

k = ordine della equazione differenziale

legge di Newton

$$F = ma$$



$x(t)$ = posizione

$x'(t)$ = velocità

$x''(t)$ = accelerazione.

$$m x''(t) = F(x(t), x'(t))$$

caduta di un grave con attrito

$$m x''(t) = m g - b x'(t)$$

chiamo $v(t) = x'(t)$ velocità

$$m v'(t) = m g - b v(t)$$

eq. diff. 1° ordine lineare

$v' = f(v)$ f pol grado 1.



Prima di questo consideriamo

$$(*) \quad u'(t) = k u(t) \quad k \in \mathbb{R}$$

non è difficile vedere che

$$u(t) = c e^{kt} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

sono soluzioni della equazione (*)

Supponiamo che $v(t)$ sia una funzione

$$\text{tale che } v'(t) = k v(t)$$

$$\text{Considero } w(t) := v(t) e^{-kt}$$

$$\begin{aligned} \text{Osservo } w'(t) &= v'(t) e^{-kt} - k v(t) e^{-kt} \\ &= k v(t) e^{-kt} - k v(t) e^{-kt} = 0. \end{aligned}$$

Cioè $w(t)$ è costante (su ogni intervallo dove è definita). $w(t) = c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$

$$v(t) e^{-kt} = c \Rightarrow v(t) = c e^{kt}.$$

OSS L'insieme $\{c e^{kt} \mid c \in \mathbb{R}\}$ è la soluzione generale dell'equazione $u'(t) = k u(t)$.

Nota che per ogni coppia $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$ il Problema di Cauchy

PdC.

$$\begin{cases} u'(t) = k u(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

← condizione iniziale.

ha una UNICA SOLUZIONE !

Infatti tutte le soluzioni sono del tipo
 $u(t) = c e^{kt}$

ed imponendo la seconda relazione
 $u_0 = c e^{kt_0} \Rightarrow c = u_0 e^{-kt_0}$.

$\Rightarrow$

$$u(t) = u_0 e^{-kt_0} e^{kt} = u_0 e^{k(t-t_0)}$$

unica soluzione del PdC.

EQ. DIFF. 1° ORDINE LINEARI

Sono equazioni di questo tipo

$$u'(t) = a(t) u(t) + b(t) \quad (E)$$

dove $a(t)$, $b(t)$ sono funzioni continue definite su un intervallo I .

(E) si dice a coefficienti costanti se $a(t) = a$, $b(t) = b$ sono f. costanti.

es. l'equazione per la velocità v nel moto caduta grave con attrito è lineare 1° ord a coeff. costanti.

$$m v'(t) = mg - b v(t)$$

$$v'(t) = g - \frac{b}{m} v(t)$$

$$a(t) = -\frac{b}{m}$$

$$b(t) = g.$$

1° step: equazione omogenea $b(t) = 0$.

$$u'(t) = a(t) u(t) \quad (H)$$

in questo caso se $A(t) = \int a(t) dt$ è una primitiva si può vedere che tutte le soluzioni di (H) sono del tipo

$$u(t) = c e^{A(t)} \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= c e^{A(t)} \cdot A'(t) = c e^{A(t)} \cdot a(t) \\ &= a(t) u(t). \end{aligned}$$

Oss: l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale 1-dim.



Se ho due soluzioni $u_1(t), u_2(t)$ di (E) cioè

$$u(t) = a(t)u(t) + b(t)$$

allora $u_1(t) - u_2(t)$ risolve (H).

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2)' &= u_1' - u_2' \\ &= a(t)u_1 + b(t) - [a(t)u_2 + b(t)] \\ &= a(t)(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

Posso scrivere $S_E = u_p + S_H$

sol di (E)
sol. part di (E).
sol di (H)

Cerco quindi una sol. part. di (E).
Si cerca nella forma seguente

$$u_p(t) = c(t)e^{A(t)}$$

variazione
delle costanti

Se impongo che risolva (E) trovo

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$$

$$c'(t)e^{A(t)} + c(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t)$$

quindi
$$c'(t) e^{A(t)} = b(t)$$

$$c'(t) = b(t) e^{-A(t)}$$

$$c(t) = \int b(t) e^{-A(t)} dt.$$

Fissata una di queste primitive si trova la u_p e quindi tutte le sol di (E)

esempio Trovare tutte le soluzioni di

$$u'(t) = u(t) + e^{3t} \quad (E)$$

$$u' = u + e^{3t}$$

l'equazione omogenea : $u'(t) = u(t) \quad (H)$

soluzioni $u(t) = c e^t ; c \in \mathbb{R}$

Cercio una sol. part

$$u_p(t) = c(t) e^t.$$

$$c'(t) e^t + \cancel{c(t) e^t} = \cancel{c(t) e^t} + e^{3t}$$

$$c'(t) e^t = e^{3t}$$

$$c'(t) = e^{2t}$$

$$c(t) = \frac{1}{2} e^{2t} + k$$

Allora
$$u_p(t) = \left[\frac{1}{2} e^{2t} + \cancel{k} \right] e^t = \frac{1}{2} [e^{3t} + k e^t]$$

Tutte le soluzioni di (E) sono
della forma

$$u(t) = \frac{1}{2} e^{3t} + c e^t ; c \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{1}{2} e^{3t} + k e^t + c e^t$$

• congetturare.

Oss Avrei potuto intuire ✓ che una sol.
particolare è del tipo $c e^{3t}$ per
una certa $c \in \mathbb{R}$.

$$u' = u + e^{3t}$$

$$3c e^{3t} = c e^{3t} + e^{3t}$$

$$3c = c + 1 \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Oss

$$u'(t) = u(t) + \sin t.$$

omogenea $u(t) = c e^t.$

sol part. $u(t) = c(t) e^t$

$$c'(t) e^t + \cancel{c(t) e^t} = \cancel{c(t) e^t} + \sin t$$

$$c'(t) = e^{-t} \sin t$$

$$c(t) = \int e^{-t} \sin t \, dt.$$



Possiamo trovare una sol. part. della
forma $a \sin(t) + b \cos(t)$ $a, b \in \mathbb{R}.$

sostituendo

$$\underbrace{a \cos(t) - b \sin(t)}_{u'} = \underbrace{a \sin(t) + b \cos(t)}_u + \sin(t).$$

$$\begin{cases} -b = a+1 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -a &= a+1 \\ \Downarrow \\ a &= -\frac{1}{2} = b \end{aligned}$$

$$u_p(t) = -\frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t).$$

esempio

$$m v'(t) = mg - b v(t)$$

$$v'(t) = -\frac{b}{m} v(t) + g \quad (*)$$

$$a(t) = -\frac{b}{m} \quad b(t) = g$$

eq. omogenea $v(t) = c e^{-\frac{b}{m}t} ; c \in \mathbb{R}$

La sol. particolare la cerco costante
 $v(t) = k$ che soddisfi (*)

$$0 = -\frac{b}{m} \cdot k + g \Rightarrow k = \frac{gm}{b}$$

sol. generale

$$v(t) = \frac{gm}{b} + c e^{-\frac{b}{m}t}$$

$c \in \mathbb{R}.$

(*)

asserma che $\bar{v}$ è tutto ben definito per $b > 0$ cioè attinto "presente"
se $b = 0$ la formula delle soluzioni non ha senso.

Problema di Cauchy
$$\begin{cases} v'(t) = -\frac{b}{m} v(t) + g \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Imponendo $v(0) = v_0$ in (*)

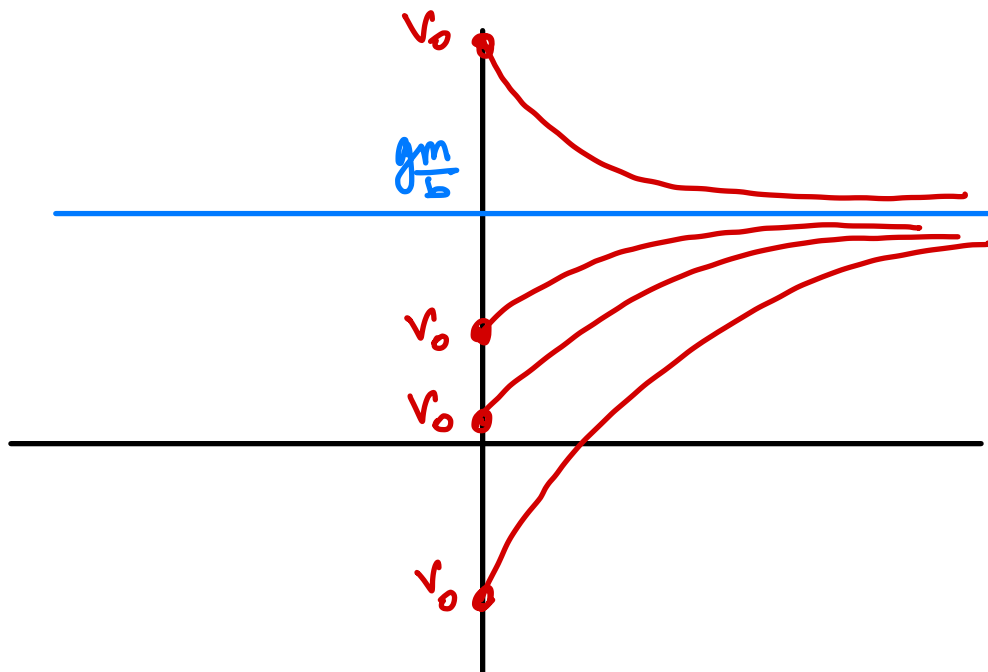
$$v_0 = \frac{gm}{b} + C \Rightarrow C = v_0 - \frac{gm}{b}$$

$$v(t) = \frac{gm}{b} + \left(v_0 - \frac{gm}{b} \right) e^{-\frac{b}{m}t}$$

nota che il segno $v_0 - \frac{gm}{b}$ è importante

ma $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{b}{m}t} = 0$ $\begin{matrix} b > 0 \\ m > 0 \end{matrix}$.

per ogni $v_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{gm}{b}$



Se $b=0$ la soluzione non ha senso
ma l'equazione si!

$$v'(t) = -\frac{b}{m} v(t) + g$$

$b=0$

$$v'(t) = g \Rightarrow v(t) = gt + c$$

$$v(t) = v_0 + gt$$

Prendiamo $v_0 = 0$.

$$b=0 \quad v(t) = gt$$

$$b>0 \quad v(t) = \frac{gm}{b} - \frac{gm}{b} e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$= \frac{gm}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m}t})$$

se $b > 0$ e $b \rightarrow 0$ potrei pensare

$$v(t) = \frac{gm}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$

$$= \frac{gm}{b} \left(1 - \left(1 - \frac{b}{m}t + o(b) \right) \right)$$

$$= \frac{gm}{b} \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{b}{m}t + \dots \right)$$

$$= gt + \dots$$

Commento la stessa equazione può modellare situazioni diverse

$$u'(t) = k u(t) - m$$

$$k > 0$$

$$m > 0.$$

x ↓

$$v'(t) = -\frac{b}{m} v(t) + g$$

x ↑

$$v'(t) = \frac{b}{m} v(t) - g$$

Esercizio Trova la soluzione generale di

$$u'(t) = \frac{3}{t} u(t) + t^2 + 1.$$