

Teorema (fondamentale del calcolo integrale)

① Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

Definiamo $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con

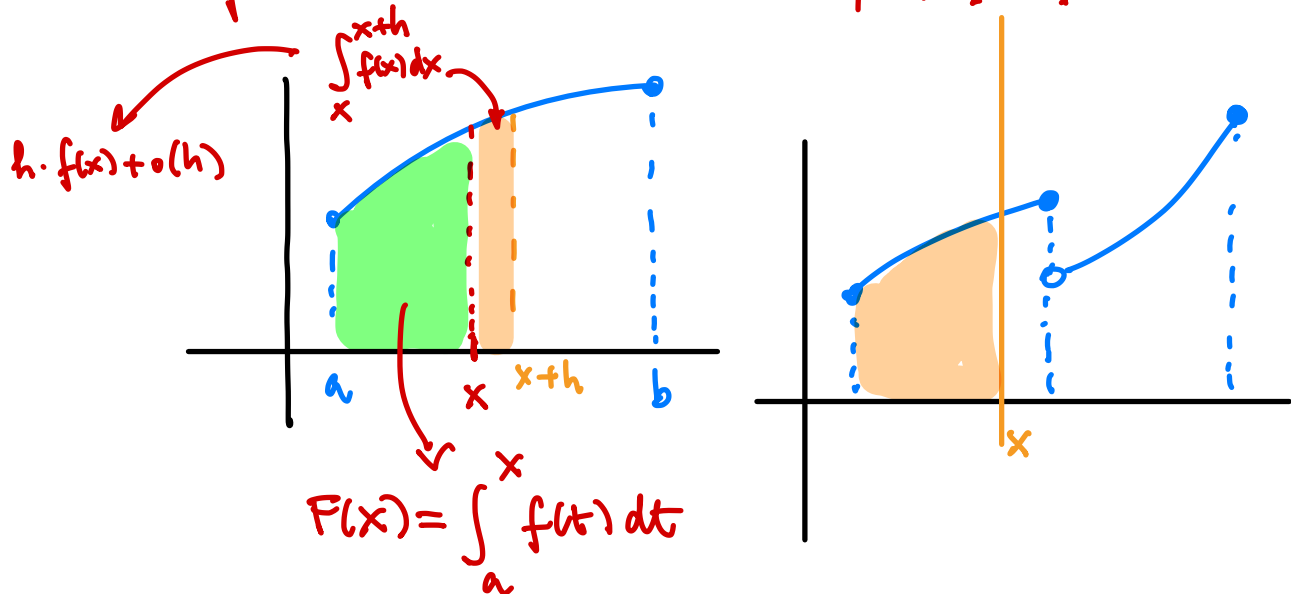
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

funzione integrale

allora F è continua.

② Se inoltre $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua
allora F è derivabile su $]a, b[$ e
vale $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[$.

(deriv. anche su $[a, b]$ se agli estremi
prendo derivata dx/sx).



dim ① Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile
Allora sappiamo che f è limitata

$$\exists m, M : \quad m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

Ne segue che preso $x_0, x_0+h \in [a, b]$ con $h > 0$

$$\begin{aligned} F(x_0+h) - F(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

ora $F(x_0+h) - F(x_0) \leq M \cdot h$

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leq |M| \cdot h$$

e si ha per $h \rightarrow 0$ $\lim_{h \rightarrow 0} F(x_0+h) = F(x_0)$.

dunque F è continua in x_0 .

② Suppongo f continua e calcolo, dato $x \in [a, b]$ e $h > 0$

$$\frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right]$$

(lineare dell'integrale) $= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$

(media integrale) $\downarrow = f(\xi_h)$ per $x \leq \xi_h \leq x+h$ (*)

$\nearrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$ per un certo $c \in [a, b]$ se f continua.

da cui $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x)$

in quanto $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = x$ per il teorema
dei due carabinieri. (*)

Si può fare analog. per $h < 0$ e si dimostra
che $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$
(dove se $x = a, x = b$ solo una derivata dx/dx)

Osservazione Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e
sia $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale
che $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Allora sia $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ e considero $F(a) = 0$.

$$H(x) = G(x) - F(x) \quad H: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H \text{ è derivabile e } H'(x) = G'(x) - F'(x) \\ = f(x) - f(x) = 0$$

Ne segue che H è costante

$$\text{ovvero } H(x) = H(a) \quad \forall x \in [a, b].$$

$$\text{così } G(b) - F(b) = G(a) - \cancel{F(a)} \quad \text{per } x = b.$$

$= 0$

segue $G(b) - G(a) = F(b) = \int_a^b f(x) dx.$

Corollario Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e

$G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile con $G'(x) = f(x)$

per ogni $x \in [a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{G(b) - G(a)}{1} = \left[G(x) \right]_{x=a}^{x=b}$$

notazione.

Una tale G si dice PRIMITIVA di f .

Esempio Calcolare $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

$f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$
 f continua

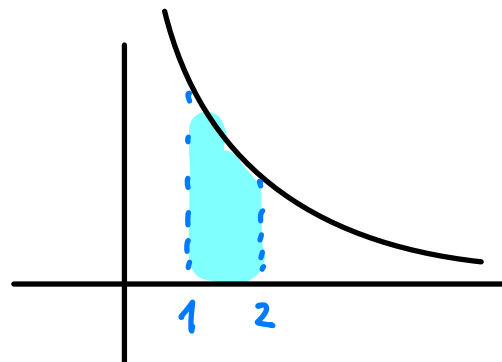
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$G: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) = \log x$$

G derivabile

$$G'(x) = f(x)$$



$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = G(2) - G(1) = \log 2.$$

Scriviamo però le somme inferiori relative all'integrale: fisso $n \in \mathbb{N}$ e dividendo $[1, 2]$ in n intervalli

$$I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

$$x_k = 1 + \frac{k}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned}\Delta_m &= \sum_{k=1}^m \inf \left\{ \frac{1}{x} ; x \in [x_{k-1}, x_k] \right\} \cdot \frac{1}{m} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{1 + \frac{k}{m}} \cdot \frac{1}{m} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k}\end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \right) = \boxed{\log 2}$$



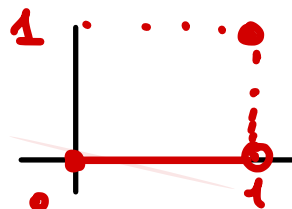
INTEGRALI E DISUGUAGLIANZE

Proposizione Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

- (i) Se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$
- (ii) Se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
 $\left. \begin{array}{l} \int_a^b f(x) dx = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$

Oss (i) vale anche per f integrabili
 (ii) è cruciale la continuità!

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$



$$\Delta_m = 0$$

$$S_n = \frac{1}{n}$$

La (ii) è utile anche con:

$$\begin{aligned} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \\ f \text{ non ident. nulla} \end{aligned} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0.$$

dim (della prop)

(i) segue direttamente dalla definizione.

(ii) Sia F una primitiva di f

(nota: ma tale F esiste sempre se f è continua, basta prendere

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad).$$

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \text{ per ipotesi} \Rightarrow \underline{F(b) = F(a) = 0}.$$

D'altra parte $F'(x) = f(x) \geq 0$

quindi F crescente $\Rightarrow F$ costante

$$\Rightarrow F'(x) = f(x) = 0 \text{ per } x \in [a, b].$$

esempio

$$\int_0^1 e^{\arcsin x} dx > 0$$

$$f(x) = e^{\arcsin x}$$

continua su $[0, 1]$

$$f(x) \geq 0$$

$f(x)$ non id. nulla.

Proposizione Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora

$$0 \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

versione "continua" della disuguaglianza

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

ovv.

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

La proposizione che abbiamo dim. sopra

(*)

$$\begin{aligned} f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \\ f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \end{aligned} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

(applico la prop. prec. a $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$)
e usare la linearità.

Ora basta osservare che $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

dimque applicando la (*)

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$-|B| \leq A \leq |B| \Rightarrow |A| \leq |B|.$$

Esempi ①

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos x \cdot \sin x \, dx$$

$$\left| \int_0^{\pi} x \cos x \sin x \, dx \right| \leq \int_0^{\pi} |x| \cdot |\sin x| \cdot |\cos x| \, dx$$

$$|\sin x| \leq 1$$

$$|\cos x| \leq 1$$

$$\leq \int_0^{\pi} |x| \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} \, dx$$

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1+x^2}$$

[continua
non id.
nulla]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$$

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx$$

$$0 < I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} \, dx$$

$\uparrow$
 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq x^n \leq 1$$

$$\forall x \in [0,1]$$

$$\leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx$$

$$\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$$

$$\forall x \in [0,1]$$

$$\leq \int_0^1 \sqrt{2} \, dx = \sqrt{2}$$

Ho dimostrato

$$0 < I_n \leq \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Potero anche ragionare con:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \sqrt{2} \cdot x^n dx \\ &\leq \sqrt{2} \int_0^1 x^n dx = \sqrt{2} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n+1} \end{aligned}$$

Ho ottenuto $0 < I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ne segue $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Oss

Notiamo che

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = x^n \sqrt{1+x^2}$$

sono tutte funzioni continue.

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1+x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{2} & x = 1 \end{cases}$$

TECNICHE DI INTEGRAZIONE

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

se conosco una primitiva F di f .

① Come la trovo una tale F ?

Osservo ad esempio che

$$D(e^{g(x)}) = g'(x) e^{g(x)}$$

$$D(g(x)^n) = n g(x)^{n-1} g'(x)$$

$$D(\sin(g(x))) = g'(x) \cos(g(x)).$$

es. ① $\frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{g'(x)} \underbrace{e^{x^2}}_{e^{g(x)}} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$

È consuetudine indicare con

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad \underline{c \in \mathbb{R}}.$$

l'insieme di tutte le primitive di f .

$$\textcircled{2} \quad \int \underbrace{\sin^3 x}_{g(x)^3} \underbrace{\cos x}_{g'(x)} dx = \frac{1}{4} \underbrace{\sin^4 x}_{\frac{1}{4} g(x)^4} + c$$

Un altro esempio $\triangleright \log \underbrace{f(x)}_{f(x) > 0} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

osservo che per $f(x) < 0$

$$\triangleright \log(-f(x)) = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

In generale $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$

es. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-1}^{x=1} = -1 - (+1) = -2.$

È SBAGLIATO!

es. $\int \tan x dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log |\cos x| + c$

Sull'esistenza di primitive

Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

F è una primitiva di f .

② È possibile, se conosco f esplicitamente
tramite composizione di fnz. elementari
"scrivere" F come comp. di fnz. elementari?

NO

$$\int e^{-x^2} dx$$

$$\int e^{x^2} dx$$