

Teorema (di Taylor)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile n volte su $]a, b[$. Sia $x_0 \in]a, b[$. Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado n tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Inoltre $P_n(x) = P_n(x; f, x_0)$ è determinato da

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ovvero

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

polinomio di Taylor di grado n di f in x_0 .

Possiamo quindi scrivere

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Formula di Taylor con resto di Peano.

Esempio $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$. [$f'(x) = e^x$]
[$f''(x) = e^x$]
⋮

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

ma $x_0 = 0$ $f^{(k)}(x_0) = e^0 = 1$.

quindi $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

dunque

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

applicazione: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{3!}$

per $x \rightarrow 0$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin^3 x = x^3 + o(x^3)$$

2

$$f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2}$$

$$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$$

⋮

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k}$$

$$x_0 = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = 2$$

$$k \geq 1$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$$

ritorno che $\log(1+x) = x + o(x)$.

3

$$f(x) = \sin x$$

$$x_0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

↓ periodico

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(0) = 1$$

Vado a scrivere il polinomio

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$



Posiamo dedurre anche lo sviluppo per $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Per analogia possiamo dedurre gli sviluppi di $\sinh x$ e $\cosh x$ in quanto

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

e vale
$$e^x = \underbrace{\sinh x}_{\text{dispari}} + \underbrace{\cosh x}_{\text{pari}}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Inoltre dallo sviluppo di $\log(1+x)$ dato che $f(x) = \log(1+x)$ soddisfa

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

ed inoltre $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$

allora per $g(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$$g^{(k-1)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

quindi
$$\frac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = (-1)^{k-1}$$

Ne segue

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

e analogamente

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

Oss Ricordiamo la formula

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$$

$x \neq 1$

$$1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

ovv!

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$$

Teorema (di Taylor con resto di Lagrange)

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile $(n+1)$ volte in $]a,b[$. Allora per ogni $x_0 \in]a,b[$

pono scrivere

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

per un opportuno c compreso tra x e x_0 .

OSS Per $n=0$ ottengo

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0).$$

OSS (ricordiamo $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$)

Applicando ad $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$ il teorema di Taylor con resto di Lagrange

$$e^x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

(uso che $f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \in \mathbb{N}$)

Per $x=1$ ottengo

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

$$0 < c < 1$$

$$x_0 = 0 \quad x = 1.$$

quindi

$$0 \leq \left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$
0

in quanto $e < 3$

osserva anche

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \bar{e} \text{ crescente.}$$

Teorema $e \notin \mathbb{Q}$

dim Sufficiente per assurdo $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$
uso la dis. precedente
quando $n = q$ ($n =$ ordine del Taylor).

$$0 < \left| \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right| < \frac{3}{(q+1)!}$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!}$$

Moltiplico per $q!$ e ottengo

$$0 < \left| p(q-1)! - \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} \right| < \frac{3}{q+1}$$

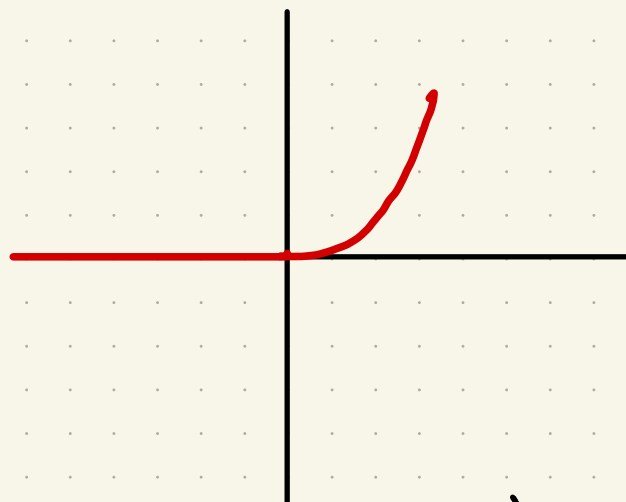
$\bar{e}$ un numero intero!

Unica possibilità è $q=1$. Che è
intero. Contraddizione.

Esempio Consideriamo questa funzione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$



Notiamo che f è continua in $x_0 = 0$ perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = 0$$

$y = 1/x$

D'altra parte f è anche derivabile in $x_0 = 0$.

$$\text{Infatti per } x > 0 \quad f'(x) = e^{-1/x} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

$$\text{ora } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^2 e^{-y} = 0$$

$y = 1/x$

Quindi f è derivabile e $f'(0) = 0$.

Si può dimostrare (provare a farlo per induzione) che f ammette derivate di ogni ordine $k \in \mathbb{N}$ e $f^{(k)}(0) = 0$.

Per il T. Taylor $f(x) = o(x^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^3}{1+x^6}$

Calcolare $f^{(9)}(0)$.

Ricordiamo

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \dots + t^n + o(t^n)$$

$t \rightarrow 0$

$$\frac{1}{1+x^6} = 1 - x^6 + x^{12} + o(x^{12})$$

$x \rightarrow 0$

$$\frac{x^3}{1+x^6} = x^3 - x^9 + x^{15} + o(x^{15})$$

pol. Taylor di ordine 15.

ne deduco $\frac{f^{(9)}(0)}{9!} = -1 \Rightarrow f^{(9)}(0) = -9!$

Esempio Calcolare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = x^4$ di grado 7 in $x_0 = 1$.

non è $x \rightarrow 0$ ma $x-1 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 \\ f''(x) &= 12x^2 \\ f'''(x) &= 24x \\ f^{(4)}(x) &= 24 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k$$

$$P_4(x) = 1 + 4(x-1) + \frac{12}{2!} (x-1)^2 + \frac{24}{3!} (x-1)^3 + \frac{24}{4!} (x-1)^4$$

$$x^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4 + o((x-1)^4).$$

si poteva recuperare con:

$$x^4 = [1 + (x-1)]^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} 1^{4-k} (x-1)^k$$

Formula binomiale Newton.

Esercizio Sfruttare una idea simile per scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \log x$ all'ordine 4 in $x_0 = 2$.

$$\log x = \log 2 + \text{"cosa"} \text{ in } (x-2)^k$$

idea : $x = 2 + (x-2)$

$$\begin{aligned} \log(x) &= \log(2 + (x-2)) \\ &= \log\left(2 \left(1 + \frac{x-2}{2}\right)\right) \\ &= \log(2) + \log\left(1 + \frac{x-2}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4).$$

$$\log\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) = \frac{x-2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x-2}{2}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{x-2}{2}\right)^4 + o(t^4)$$

$$= \frac{1}{2} (x-2) - \frac{1}{8} (x-2)^2 + \frac{1}{24} (x-2)^3 - \frac{1}{64} (x-2)^4 + o((x-2)^4)$$

Esempio Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 di $f(x) = \log(1 + \sin x)$ in $x_0 = 0$

Ho $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$

$t = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$

$$\log(1 + \sin x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^3 - \frac{1}{4} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^4 + o(t^4)$$

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^2 = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + o(x^4)$$

$$\log(1 + \sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3} x^4 + o(x^4) \right)$$

$$+ \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)$$

$$- \frac{1}{4} x^4 + o(x^4) + o(x^4)$$

noto che $o(t^4) = o(\sin^4 x)$
 $= o((x + o(x))^4)$
 $= o(x^4)$.

$$\begin{aligned} \log(1 + \sin x) &= x - \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) x^3 \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) x^4 + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \end{aligned}$$

Calcoliamoci lo sviluppo di , dato $\alpha \in \mathbb{R}$,
 $f(x) = (1+x)^\alpha$ in $x_0 = 0$, $f(0) = 1$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + o(x^3)$$

not: il coefficiente generale

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} =: \binom{\alpha}{k}$$

COEFF. BINOMIALE
 $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$.

in particolare: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}}{x^\alpha}$

Calcolare il valore del limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Faccio uno sviluppo di Taylor

$$\begin{aligned} 2e^x &= 2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) \\ &= 2 + 2x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$



$$\sqrt{1+4x} = 1 + \frac{4x}{2} - \frac{1}{8}(4x)^2 + \frac{1}{16}(4x)^3 + o(x^3)$$

$o((4x)^3)$

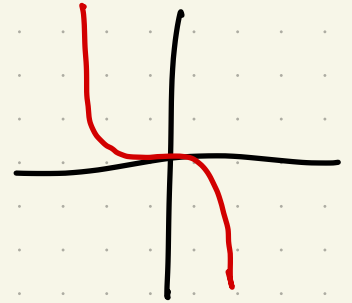
$$= 1 + 2x - 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+6x^2} = 1 + \frac{6x^2}{2} + o(x^3)$$

$$= 1 + 3x^2 + o(x^3)$$

$$N(x) = \left(\frac{1}{3} - 4\right)x^3 + o(x^3)$$

$$= -\frac{11}{3}x^3 + o(x^3)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{N(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{11}{3}x^3 + o(x^3)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{11}{3}x^{3-\alpha}$$

$$= \begin{cases} -\frac{11}{3} & \alpha = 3 \\ 0 & \alpha < 3 \\ -\infty & \alpha > 3 \end{cases}$$

Criterio per determinare max/min

Data $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte
e na $x_0 \in]a, b[$ tale che

$$0 = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0)$$

$$\text{con } f^{(m)}(x_0) \neq 0.$$

Allora (i) n dispari $\Rightarrow x_0$ nè max nè min locale

$$(ii) \ n \text{ pari} \Rightarrow \begin{cases} f^{(m)}(x_0) > 0 & x_0 \text{ min } \text{locale} \\ f^{(m)}(x_0) < 0 & x_0 \text{ max } \text{locale} \end{cases}$$

uso lo sviluppo di Taylor.

idea: $\downarrow$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m + o((x - x_0)^m)$$

$$= (x - x_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + o(1) \right].$$

esempio: $N(x) = 2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$

$$N(x) = -\frac{11}{3}x^3 + o(x^3)$$

allora $N'(0) = N''(0) = 0$ e $N'''(0) < 0$

quindi 0 nè max nè min per N .

altro esempio:

$$f(x) = x^2 \sin(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$f(x) = x^2 (x^2 + o(x^2)) = x^4 + o(x^4)$$

allora $x_0 = 0$ è minimo locale per f .

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{1 - \sqrt{1-x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{1}{3}$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$$

$$\sqrt{1-x^3} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1-x^3} &= 1 - \left(1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

Per sviluppare il numeratore calcolo le derivate: verificata che

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\arcsin x - x = \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Esercizio Calcolare in funzione di $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^\alpha) - x^\alpha + 1 - \cosh x}{\sqrt{9-6x^2} - \sqrt{9+6x^2}}$$

DIMOSTRAZIONE FORMULA DI TAYLOR

Data $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte, $x_0 \in]a, b[$
Esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado n :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

e si scrive

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Lemma Data $H:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte, e sia $x_0 \in]a, b[$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{H(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \iff \begin{aligned} &H(x_0) = 0, \quad H'(x_0) = 0 \\ &\dots \quad H^{(n)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

$H(x) = o((x - x_0)^n)$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{n+1 \text{ "identit\`a"}}.$

dim (di Taylor)

Cerchiamo un polinomio $P_m(x)$ nella forma

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k (x-x_0)^k \\ = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_m(x-x_0)^m$$

noto che vale

$$P_m^{(k)}(x_0) = k! a_k$$

$$\frac{d^k}{dx^k} (x-x_0)^h = \begin{cases} 0 & , k > h \\ k! & , k = h \\ h(h-1)\dots(h-k+1)(x-x_0)^{h-k} & , k < h \end{cases}$$

Considero $H(x) = f(x) - P_m(x)$ per il lemma deve valere

$$H(x_0) = H'(x_0) = \dots = H^{(m)}(x_0) = 0.$$

$$0 = H(x_0) \iff f(x_0) = a_0$$

$$0 = H'(x_0) \iff f'(x_0) = a_1$$

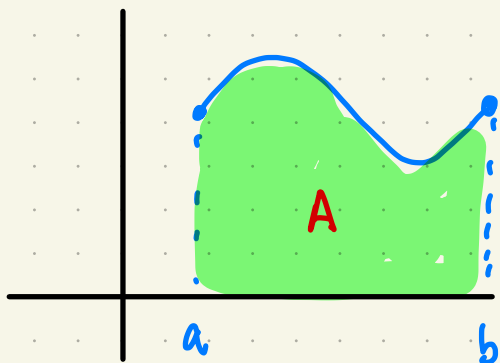
$\vdots$

$$0 = H^{(k)}(x_0) \iff f^{(k)}(x_0) = k! a_k$$

per $k=0, \dots, m$ ho

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

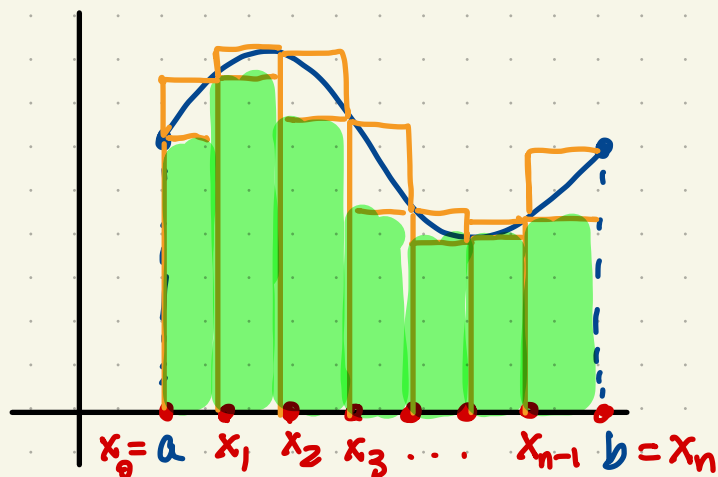
9

INTEGRALE DI RIEMANNIntegrale $\leftrightarrow$ nozione di area

$$\text{Area}(A) = \int_a^b f(x) dx$$

Consideriamo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata
 ovvero $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

Dividiamo $[a, b]$ in n parti uguali



$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

$$\vdots$$

$$x_n = a + \frac{n}{n}(b-a) = b$$

Somma inferiore : denoto $I_k = [x_{k-1}, x_k]$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(\inf_{I_k} f \right) (x_k - x_{k-1})$$

somma inf
n-esima.

Somma superiore

$$S_m = \sum_{k=1}^m (\sup_{I_k} f) (x_k - x_{k-1})$$

Somma sup.
m-esima

Def Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata
è integrabile (secondo Riemann) su $[a, b]$
se vale

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = s$$

$$e \quad s = S.$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Se f è integrabile allora denoto

$$\int_a^b f(x) dx$$

questo valore come $(s = S)$

notazione

$$\int_a^b f(x) dx$$

var cont.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(x_k) \Delta x_k.$$

var discreti

Esempio $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = ax \quad a > 0$$

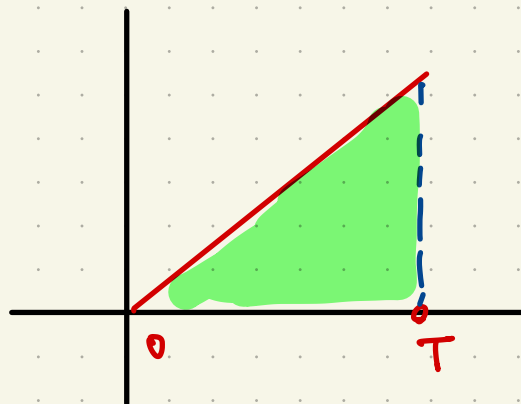
Divido $[0, T]$ in n
intervalli uguali:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{T}{n}$$

$$\vdots$$
$$x_k = k \frac{T}{n}$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$



$$I_k = [x_{k-1}, x_k] = \left[\frac{k-1}{n} T, \frac{k}{n} T \right]$$

essendo f crescente

$$\inf_{I_k} f = a \cdot \frac{k-1}{n} T$$

$$\sup_{I_k} f = a \cdot \frac{k}{n} T.$$

Somma inferiore

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \sum_{k=1}^n \left(\inf_{I_k} f \right) (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(a \cdot \frac{k-1}{n} T \right) \cdot \frac{T}{n} \\ &= \frac{a T^2}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) \end{aligned}$$

Microdiamo

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

d'altra parte

$$\sum_{k=1}^n (k-1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{n-1} h &= \sum_{h=1}^{n-1} h \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Somma superiore

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{k=1}^n \left(\sup_{I_k} f \right) (x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{a T^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k. \end{aligned}$$

$$\Delta_m = \frac{a T^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} a T^2$$

$$S_m = \frac{a T^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} a T^2$$

Quindi f è integrabile

$$\int_0^T a x \, dx = \frac{1}{2} a T^2$$

Esempio (funzione di Dirichlet)

Considero $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Notiamo che f è limitata ma non è continua in nessun punto

$\forall \alpha < \beta$ in $[0,1]$

$$[\alpha, \beta] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

$$[\alpha, \beta] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset.$$

Ne segue che $\inf_{[\alpha, \beta]} f = 0$ $\sup_{[\alpha, \beta]} f = 1$.

Quindi quando considero σ_n, S_n ho

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \left(\inf_{I_k} f \right) (x_k - x_{k-1}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sup_{I_k} f \right) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Osservazione sulla definizione

Questo non è l'unica maniera di definire l'integrabilità alla Riemann.

La def più classica tramite somme sup e inferiori è data tramite

scomposizioni $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$

arbitrarie di $[a, b]$

(in cui non necess. $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$)

definendo $\mathcal{B} = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$

$$\text{diam}(\mathcal{B}) = \max_i |x_i - x_{i-1}|$$

$$A_m = \sum_{k=1}^m \left(\inf_{I_k} f \right) (x_k - x_{k-1})$$

← dipende da k .

$$S_m = \sum_{k=1}^m \left(\sup_{I_k} f \right) (x_k - x_{k-1})$$

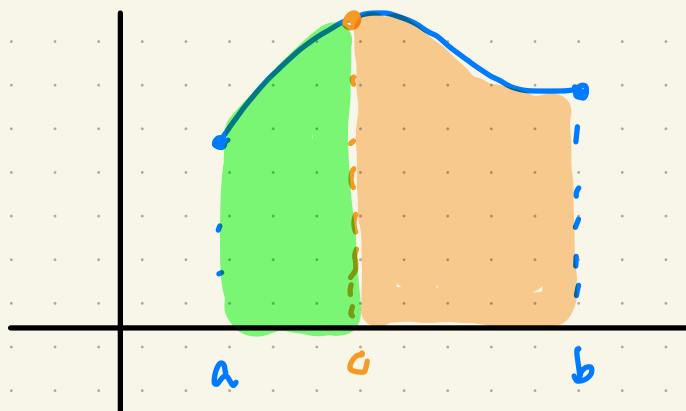
si chiede esistenza del limite per $\text{diam}(\mathcal{B}) \rightarrow 0$.

Le due def. sono equivalenti. Ma questa seconda permette più agevolmente:

Prop Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e $c \in [a, b]$

allora

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



Oss (somme di Riemann)

Un ulteriore approccio è quello di utilizzare "somme di Riemann":

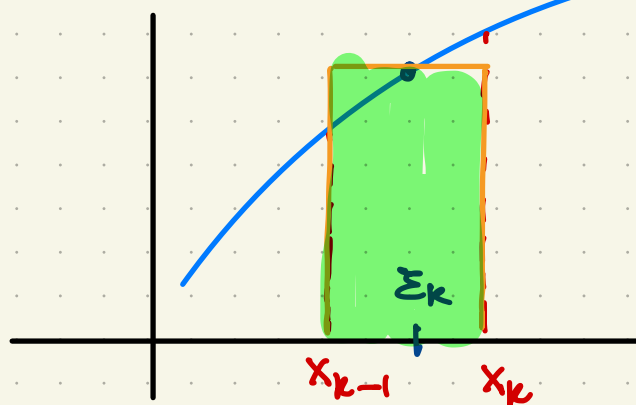
fissare $\mathcal{S} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$

decomporre e costruire

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

somma di Riemann.

dove $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$



anche qui la somma dipende da n (punti) e chiedo $n \rightarrow \infty$ $\text{diam}(\mathcal{S}) \rightarrow 0$ e la somma converge.

Alcune osservazioni:

① Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile

allora

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (*)$$

per ogni $c \in [a, b]$. Ma la formula
può applicarsi per ogni $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

in (*) prendo $a = b = \alpha$ $c = \beta$.

② Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

allora

$$\underbrace{m(b-a)}_{s_1} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{M(b-a)}_{S_1}.$$

2 bis

Se inoltre $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua
allora $\exists c \in [a, b]$ tale che

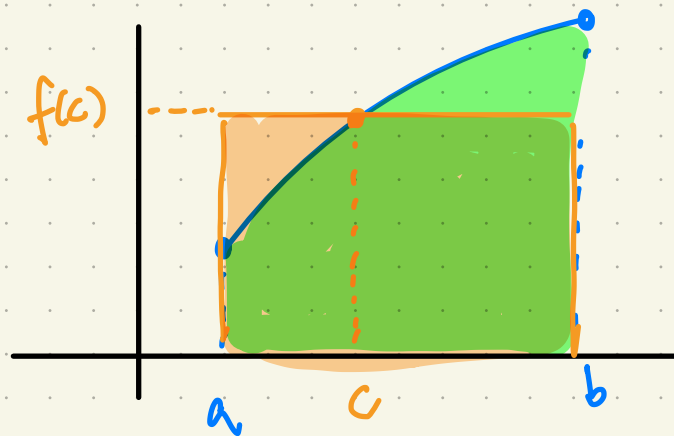
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

formula della media integrale.

in fatti essendo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua
 per il teo. Weierstrass $\exists m = \min_{[a, b]} f$
 ed $\exists M = \max_{[a, b]} f$. Dunque dalla ②

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

allora per il teo. valori intermedi $\exists c \in [a, b]$
 tale che $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.



Teorema Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua allora
 f è integrabile su $[a, b]$.

nota: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua è limitata
 per il Teo. Weierstrass

inoltre per f continue

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\inf_{I_k} f \right) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

per un opportuno $\xi_k \in I_k$

se f continua "inf = min = $f(\xi)$ ".

Quindi per $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$s_m = \sum_{k=1}^m f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^m f(\xi_k)$$

per opportuno $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

$$S_m = \sum_{k=1}^m f(\zeta_k) (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^m f(\zeta_k)$$

per opportuni $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Supponendo $\lim_{n \rightarrow \infty} s_m$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ esistano
(ma sarebbe da dimostrare).

$$S_m - s_m = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^m (f(\zeta_k) - f(\xi_k)) < n\varepsilon$$

con $\zeta_k, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ di lunghezza $\frac{b-a}{n}$.

$$|\zeta_k - \xi_k| \leq \frac{b-a}{n}$$

continuità: " $|\zeta_k - \xi_k| < \delta \Rightarrow |f(\zeta_k) - f(\xi_k)| < \varepsilon$ "

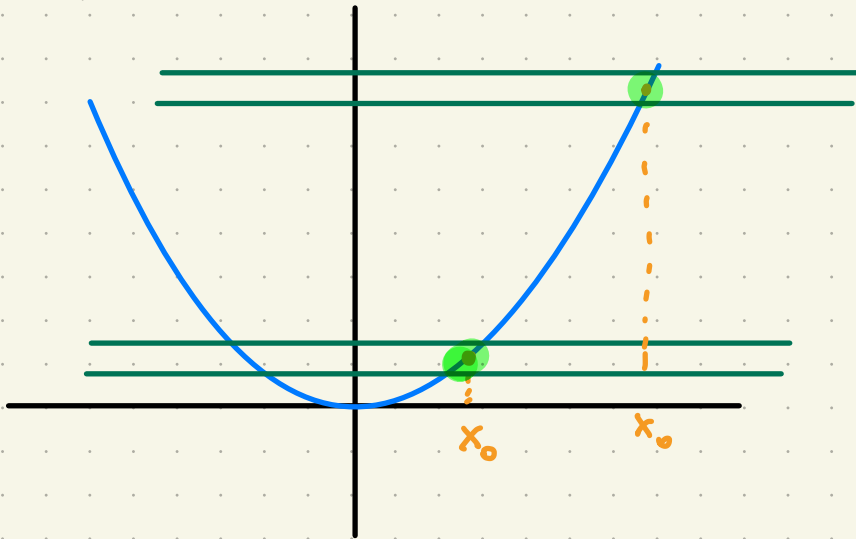
! c'è una sottigliezza!

oss $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua (in ogni $x_0 \in [a, b]$)

$\forall x_0 \in [a, b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
 $\uparrow$
 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.

$$f(x) = x^2$$

non è unif
cont. su $\mathbb{R}$.



Teorema (di Heine - Cantor)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora

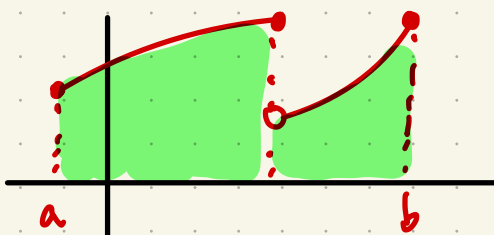
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$x, y \in [a, b]$ UNIFORME CONTINUITÀ.

↑ la scelta di δ non dipende da x_0
ovvero esiste un $\delta > 0$ UNIFORME IN $x_0 \in [a, b]$

alternativamente: f continua su $[a, b]$
 $\Rightarrow f$ è uniform. continua.

Oss. Esistono funzioni discontinue (ma limitate) e integrabili.



se sono in numero finito è ok.

Teorema (fondamentale del calcolo integrale)

① Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

Definiamo $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

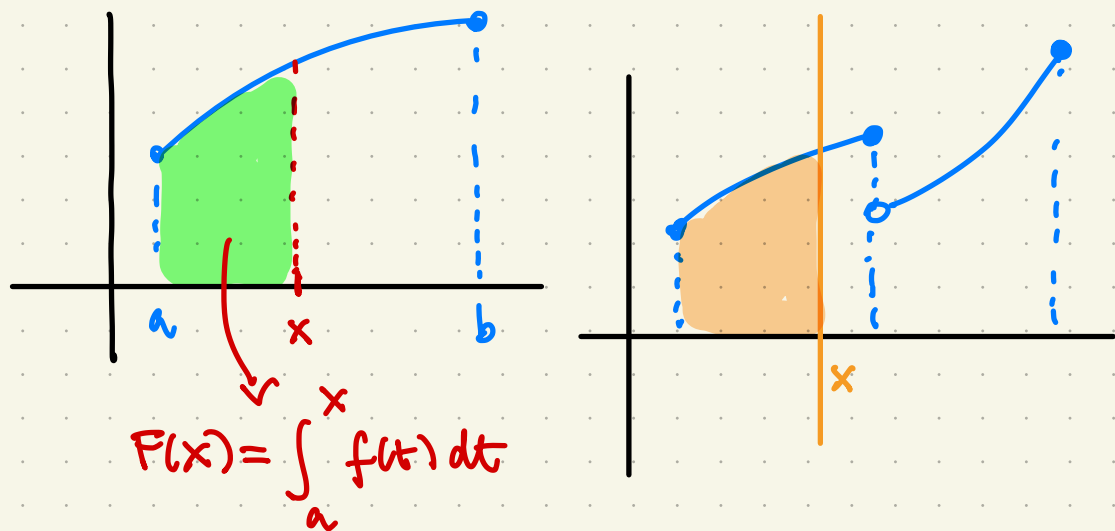
funzione integrale

allora F è continua.

② Se inoltre $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua
allora F è derivabile su $]a, b[$ e

$$\text{vale } F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[.$$

(deriv. anche su $[a, b]$ se agli estremi
prende derivata dx/sx).



dim ① Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile
Allora sappiamo che f è limitata

$$\exists m, M : \quad m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

Ne segue che preso $x_0, x_0+h \in [a, b]$ con $h > 0$

$$\begin{aligned} F(x_0+h) - F(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

ora $F(x_0+h) - F(x_0) \leq M \cdot h$

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leq |M| \cdot h$$

e si ha per $h \rightarrow 0$ $\lim_{h \rightarrow 0} F(x_0+h) = F(x_0)$.