

Esempio la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{12x+1}{x-1}\right) \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$

non è derivabile in $x_0 = 0$.

In fatti la funzione f è derivabile in D

Per $x > 0$ abbiamo

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{2(x-1) - 2x \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2 + 4x^2} \quad \underline{x > 0} \quad \text{in } D.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2$$

con calcoli analoghi $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2 + 4x^2} \quad \underline{x < 0}$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.

ragionamento euristico:

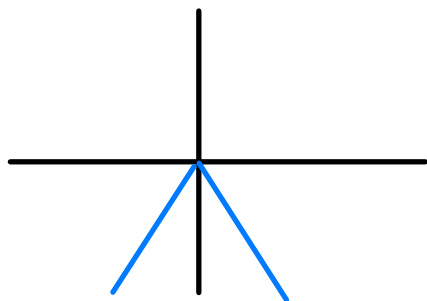
$$\tan(x) = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{\tan x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\arctan(x) = x + o(x) \quad x \rightarrow 0 \quad \frac{x}{\arctan x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

ora

$$\arctan\left(\frac{|2x|}{x-1}\right) = \frac{|2x|}{x-1} + o\left(\frac{|2x|}{x-1}\right) \quad x \rightarrow 0.$$



$$= -|2x| + o(|x|)$$

Teorema (de l'Hopital)

Sia $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue e

f, g derivabili in $]a, b[\setminus \{x_0\}$

Supponiamo $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g'(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

notiamo che il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è $\frac{0}{0}$

Possiamo scrivere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se esiste il limite a dx $\Rightarrow$ esiste lim a sx e sono uguali.

esempio ①

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

ci dice $\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

ovvero

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

"meglio" di $\sin x = x + o(x)$.

②

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 2 + x}{\sin^2(\pi x)} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2} + 1}{2 \sin(\pi x) \underbrace{\cos(\pi x)}_{\substack{\downarrow \\ -1}} \cdot \pi}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-2\pi} \frac{-\frac{1}{x^2} + 1}{\sin(\pi x)} \quad \frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3}$$

$$\stackrel{(H)}{=} -\frac{1}{2\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^{-3}}{\pi \cos(\pi x)} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{-\pi} = \frac{1}{\pi^2}$$

OSS Ponendo $y = x - 1$ (ovvero $x = y + 1$) ho

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 2 + x}{\sin^2(\pi x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{y+1} - 2 + y + 1}{\sin^2(\pi(y+1))}.$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{y+1} - 1 + y}{\sin^2(\pi y)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x}$$

abbiamo $\frac{1}{y+1} = (1+y)^{-1} = 1 - y + o(y)$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{o(y)}{\sin^2(\pi y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{o(y)}{\pi^2 y^2 + o(y^2)}$$

Il Teorema di de l'Hospital vale più in generale per situazioni del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{del tipo } \left[\frac{0}{0} \right] \text{ o } \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

e con $x_0 \in \mathbb{R}$ o $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$

Idea: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \overset{=0}{f(x_0)}}{g(x) - \overset{=0}{g(x_0)}}$

applico il
T. Lagrange.

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(\tilde{c}_x)}$$

$$\begin{aligned} x_0 &< c_x < x \\ x_0 &< \tilde{c}_x < x \end{aligned}$$

Se ne ha una variante del T. Lagrange

Teorema Cauchy $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ stesso ξ !

DERIVATE E MONOTONIA

Teorema Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua
e derivabile in $]a, b[$. Sono equivalenti:
(i) f monotona crescente in $[a, b]$ (decrescente)
(ii) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ (≤ 0).

dim (i) $\Rightarrow$ (ii)

Per ipotesi $x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

$\uparrow$ mette + perché f derivabile.

(ii) $\Rightarrow$ (i) segue dal T. Lagrange.

Se $x_1 \leq x_2$ in $[a, b]$ allora:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) (x_2 - x_1) \quad x_1 < \xi < x_2.$$

ed essendo $f'(\xi) \geq 0$ ne dice che

$$x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

Oss Se io so $f'(x) > 0$ in $]a, b[$ allora
l'argomento mi permette di dire

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

$f' > 0 \Rightarrow f$ strettamente crescente.

monotonia		derivata
crescente	$\Leftrightarrow$	$f' \geq 0$
strettamente crescente	$\Leftarrow$ ~~$\Rightarrow$~~	$f' > 0$

es. $f(x) = x^3$ strettamente crescente
ma $f'(x) = 3x^2$ e $f'(0) = 0$.

Esempio Tracciamo il grafico di
 $f(x) = x^3 + x^4$

Notiamo che f è definita su tutto $\mathbb{R}$
ed è continua e derivabile.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + x^4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

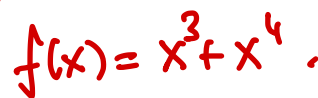
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x^4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^4}_{\downarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow 0}\right) = +\infty.$$

Applicando opportunamente il teorema di
Weierstrass $\Rightarrow \exists \min_{\mathbb{R}} f$ (globale!)

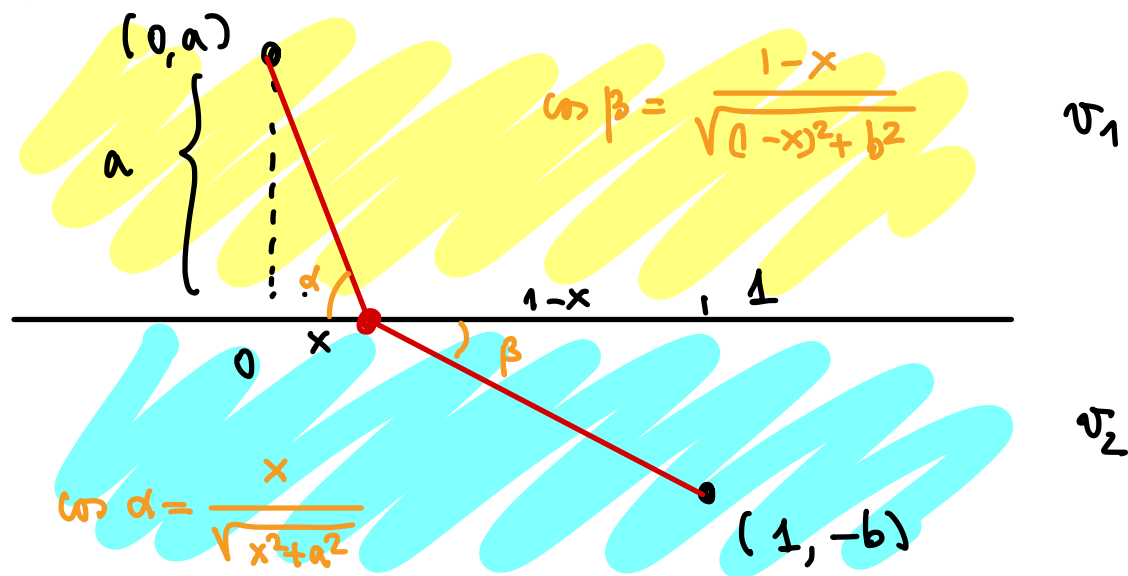
$$f'(x) = 3x^2 + 4x^3 = x^2(3 + 4x)$$

$3 + 4x$

$$f(\omega) = 0$$


$$f(x) = \arctan\left(\frac{|2x|}{x-1}\right)$$

Esempio (d bagno)



Ipotesiamo di avere velocità v_1 sulla sabbia e v_2 in acqua.

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(1-x)^2 + b^2}}{v_2} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

calcolo $T'(x)$

$$T'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}v_1 \sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{-\cancel{2}(1-x)}{\cancel{2}v_2 \sqrt{(1-x)^2 + b^2}}$$

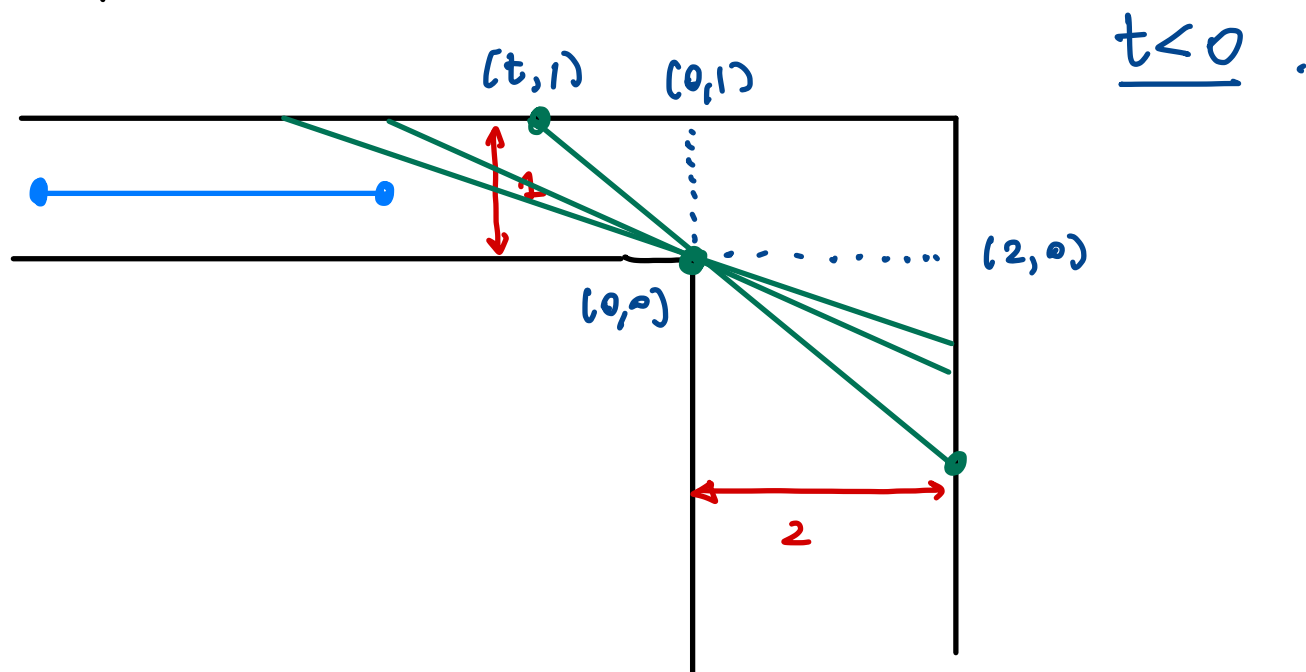
$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{(1-x)}{\sqrt{(1-x)^2 + b^2}}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{v_2} \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v_1} \cos \alpha = \frac{1}{v_2} \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

Esempio (il drano)



Derivata seconda di $T(x)$ calcolato sopra

Prima calcolo

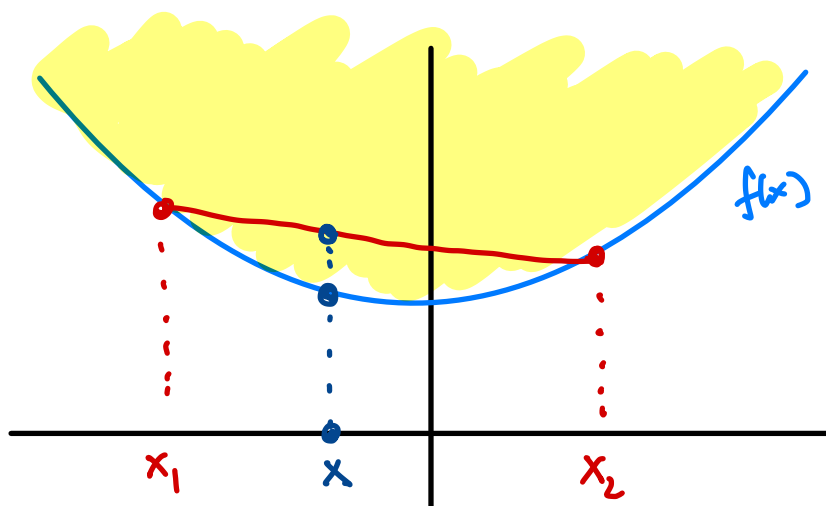
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + a^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}}{(x^2 + a^2)} \\ &= \frac{\cancel{x^2} + a^2 - \cancel{x^2}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

con calcoli analoghi:

$$T''(x) = \frac{1}{v_1} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{v_2} \frac{b^2}{((1-x)^2 + b^2)^{3/2}}$$

positivo
convessa

FUNZIONI CONCAVE E CONVESSE



$$G_f^+ = \{(x, y) \mid y \geq f(x)\}$$

sopragrafico

$$f \text{ convessa} \Leftrightarrow \underbrace{\forall p, q \in G_f^+ \Rightarrow \overline{pq} \subseteq G_f^+}_{G_f^+ \text{ insieme convesso.}}$$

def Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se per ogni $x_1 \leq x \leq x_2$ in $[a, b]$ vale

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$f(x_1) + m(x - x_1)$$

Diremo che f è concava se $-f$ è convessa.

oss Essendo $x_1 \leq x \leq x_2$ possiamo scrivere
 $x = tx_1 + (1-t)x_2$ per $t \in [0, 1]$.

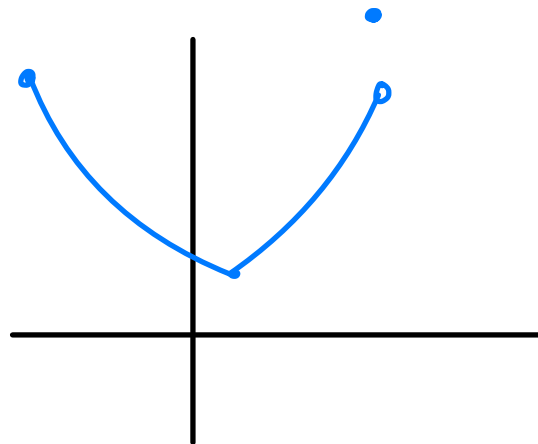
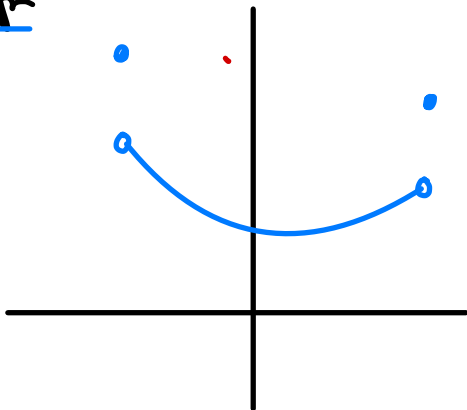
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (1-t)(x_2 - x_1)$$

mostrare $x - x_1 = (t-1)x_1 + (1-t)x_2$
 $= (1-t)(x_2 - x_1)$

si trova che f è convessa se
 $\forall x_1 < x_2$ e $\forall t \in [0,1]$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

esempi



Una funzione convessa $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è
 continua su $]a,b[$ e se è derivabile la
 derivata è monotona crescente.

def Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile ed esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} =: f''(x_0) \quad x_0 \in]a,b[$$

derivata seconda di f .

Teorema Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile due volte in $]a, b[$. Allora

(i) f convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

(ii) f concava $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

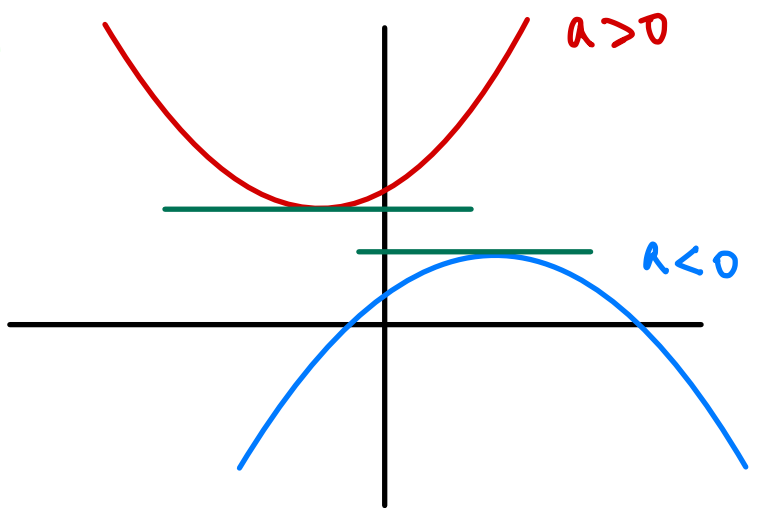
Esempio Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.

allora $f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

f' si annulla

in $x = -\frac{b}{2a}$



Teorema Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile due volte in $x_0 \in]a, b[$ dove $f'(x_0) = 0$.

Allora

(i) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è minimo locale

(ii) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è massimo locale.

Esempio Tracciamo il grafico di

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log |x| & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{f pari} \\ f(x) = f(-x). \end{array}$$

Notiamo che f è continua su tutto $\mathbb{R}$

(per $x \neq 0$ è comp di f continue e in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \log |x| = 0.$$

Calcolo per $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \log x)' \\ &= 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= x(2 \log x + 1) \end{aligned}$$

Essendo f pari $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

derivando $-f'(-x) = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

in parte per $x > 0 \quad f'(-x) = -f'(x).$

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(2 \log x + 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{D' altra parte } \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0.$$

Quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

Dunque f è derivabile in $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \log x + x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 2x \log(-x) + x & x < 0 \end{cases}$$

notiamo che $x < 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \log(-x) \\ f'(x) &= 2x \log(-x) + x^2 \cdot \frac{-1}{-x} \\ &= 2x \log(-x) + x \end{aligned}$$

Osservo $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log|x| = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \log|x| = +\infty.$$

D'altra parte $f'(x) = 0$ ha soluzioni:

$$x_0 = 0 \quad \text{e per } x > 0 \quad 2x \log x + x = 0$$

$$x(2 \log x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \log x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log x = -1/2$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Per simmetria $f'(x) = 0$ anche in $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{e}}$.

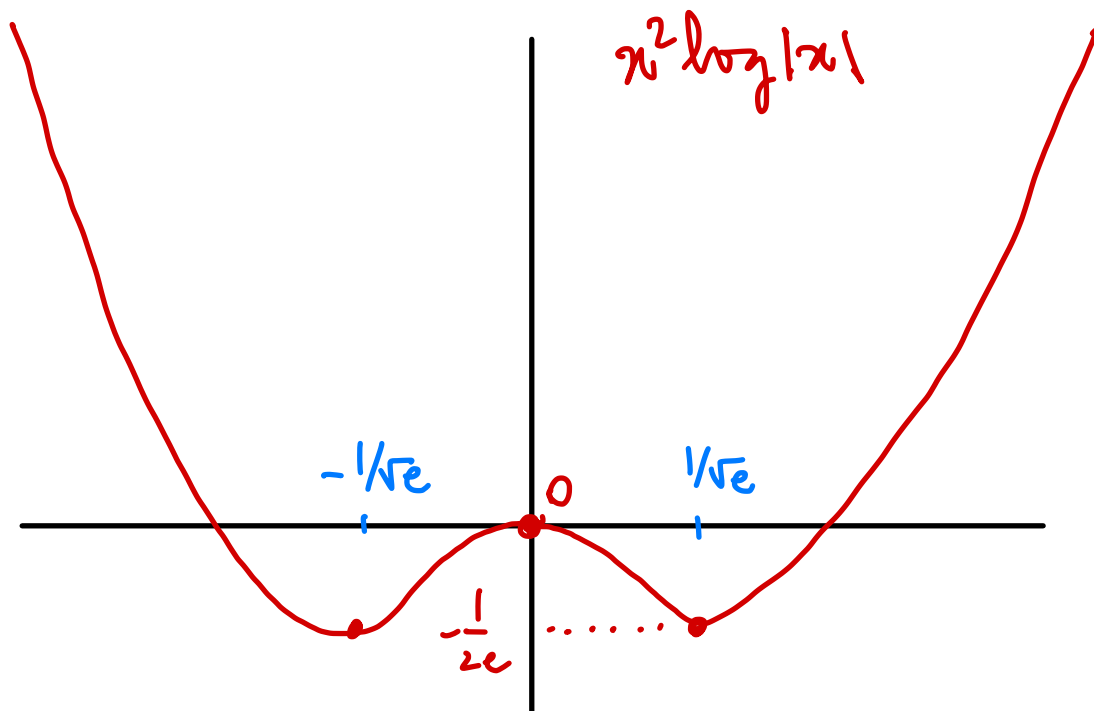
Calcoliamo per $x > 0$ la derivata seconda

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x \log x + x)' \\ &= 2 \log x + 2 + 1 = 2 \log x + 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(e^{-1/2}) &= 2 \log e^{-1/2} + 3 \\ &= 2 \cdot (-\tfrac{1}{2}) + 3 = -1 + 3 = 2 > 0. \end{aligned}$$

$x_0 = e^{-1/2}$ è pto di minimo locale.

(analogamente $x_0 = -e^{-1/2}$ è minimo locale)



$$f(e^{-1/2}) = (e^{-1/2})^2 \log |e^{-1/2}| = e^{-1} \cdot (-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2e} < 0.$$

POLINOMI DI TAYLOR

Prendiamo la def di derivata

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si può tradurre (per f deriv. in x_0)

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + \underbrace{o(x - x_0)}_{R_1(x)}.$$

$$P_1(x) = P_1(x; f, x_0)$$

polinomio di grado 1

$$R_1(x) = R_1(x; f, x_0)$$

resto di ordine sup a 1

per def $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0$.

equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} = 0$$

$P_1(x)$ è l'unico polinomio di 1° grado che soddisfa questa proprietà.

Domanda: Data f, x_0 esiste un $P_n(x) = P_n(x; f, x_0)$ polinomio di grado n che soddisfa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

o vero $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ con

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

ovvero $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

Esempio Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$
 $x_0 = 0$

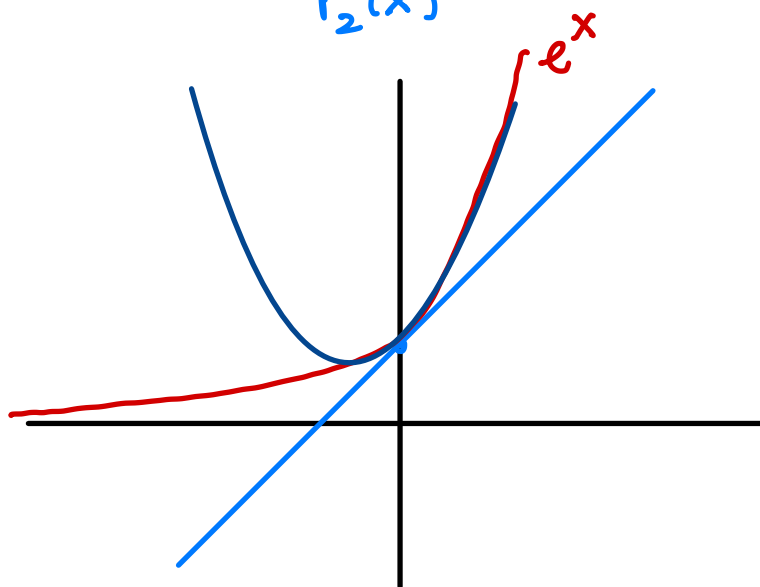
sappiamo $e^x = 1 + x + o(x)$

segue da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ora calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

cioè $e^x = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2}} + \boxed{o(x^2)}$
 $P_2(x)$ $R_2(x)$



Teorema (di Taylor)

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile n volte su $]a,b[$. Sia $x_0 \in]a,b[$. Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado n tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Inoltre $P_n(x) = P_n(x; f, x_0)$ è determinato da

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ovv.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

polinomio di Taylor di grado n di f in x_0 .

Possiamo quindi scrivere

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Formula di Taylor con resto di Peano.

Esempio $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$. $[f'(x) = e^x]$
 $[f''(x) = e^x]$
 $\vdots$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

ma $x_0 = 0$ $f^{(k)}(x_0) = e^0 = 1$.

quindi $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

dunque

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

applicazione: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{3!}$

per $x \rightarrow 0$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin^3 x = x^3 + o(x^3)$$