

Esercizio Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^2 \cos x - 3x \sin x + 5$$

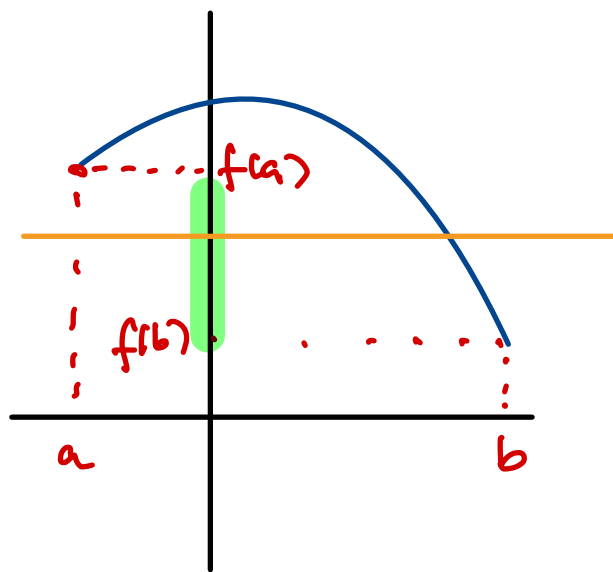
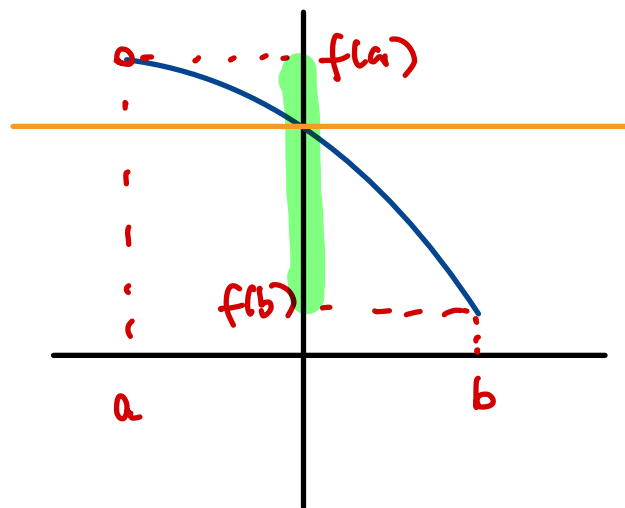
Mostrare che f si annulla infinite volte.

Teorema (dei valori intermedi)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Se ad es. $f(a) \leq f(b)$ allora

$\forall y \in \mathbb{R}$, $f(a) \leq y \leq f(b)$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$



dim Supponiamo ad es che $f(a) \leq f(b)$
(l'altro caso è simile)

Dato $y \in \mathbb{R}$ t.c. $f(a) < y < f(b)$ (*)

consideriamo la funzione

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = f(x) - y$$

la funzione g è continua su $[a, b]$

$$g(a) = f(a) - y \stackrel{(*)}{<} 0$$

$$g(b) = f(b) - y \stackrel{(*)}{>} 0$$

Donque per il teorema degli zeri $\exists c \in]a, b[$
tale che $g(c) = 0$ ovvero $f(c) = y$.

Oss Ricordiamo che $A \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo
(aperto o chiuso) se e solo se vale

$$\text{dati } \begin{matrix} a, b \in A \\ a < b \end{matrix} \Rightarrow \left[\forall y \in \mathbb{R} \quad a < y < b \Rightarrow y \in A \right].$$



Corollario Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e
 $I \subseteq A$ intervallo (aperto o chiuso)
allora $f(I)$ è un intervallo.



In generale $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$.

Teorema (di Weierstrass)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato ed f continua.

Allora f assume massimo e minimo su $[a, b]$.

conseguenza f continua allora

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f \right]$$

dim Sia $M = \sup \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$

questo esiste e posso avere $M = +\infty$ o $M < +\infty$

In entrambi i casi: esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in [a, b] \ \forall n \in \mathbb{N}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$. Infatti

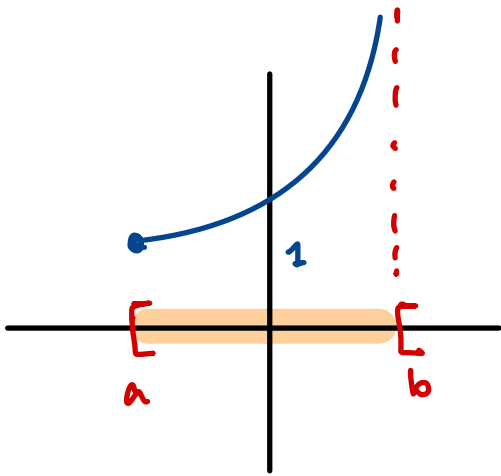
- se $M = +\infty$ allora $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$
- se $M < +\infty$ allora per def di sup.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a, b] : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$

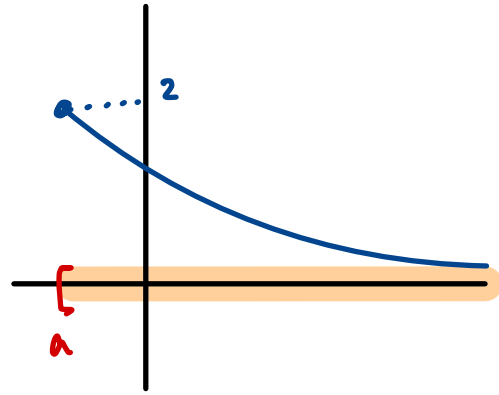
$\varepsilon = 1/n$

e ne deduco $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$ in entr. i casi

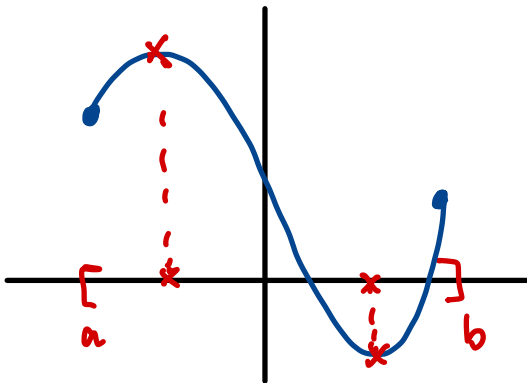
D'altra parte $x_n \in [a, b] \ \forall n \in \mathbb{N}$. Essendo limitata $\exists$ sotto successione convergente.



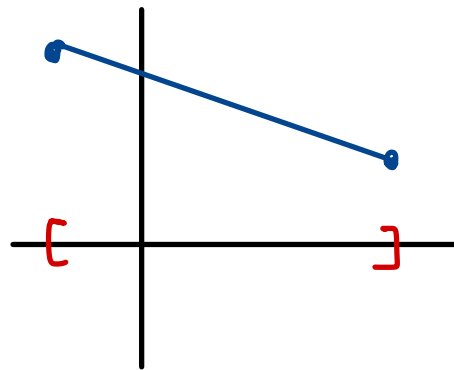
limitato ma
non chiuso



chiuso a sx ma
illimitato a dx.



max/min all'interno



max/min sul bordo

Chiamiamo $(x_{k_n})_n$ la sottosequenza e
 $\bar{x} \in [a, b]$ il limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = \bar{x}$.

Essendo f continua $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(\bar{x})$

D'altra parte $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$.

se una succ. converge allora
tutte le sottosucc. convergono
allo stesso limite.

Ne segue
 $f(\bar{x}) = M$

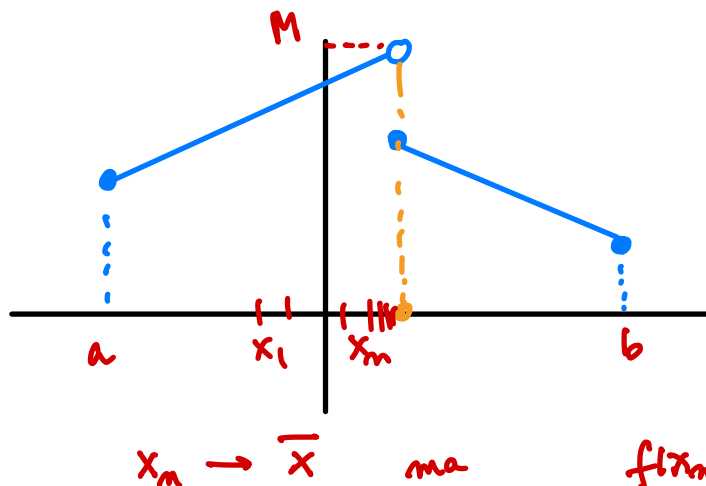
Questo ci dice che $M < +\infty$ ed inoltre

$$M = \max \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}.$$

(quindi $\bar{x}$ pto di massimo per f).

Analogo è il ragionamento per il min.

Oss Anche l'ipotesi di continuità è
essenziale. Ad esempio:



definita su $[a, b]$
ma non continua
non ha massimo.

$\nearrow M$
 $f(x_n) \neq f(\bar{x})$

8

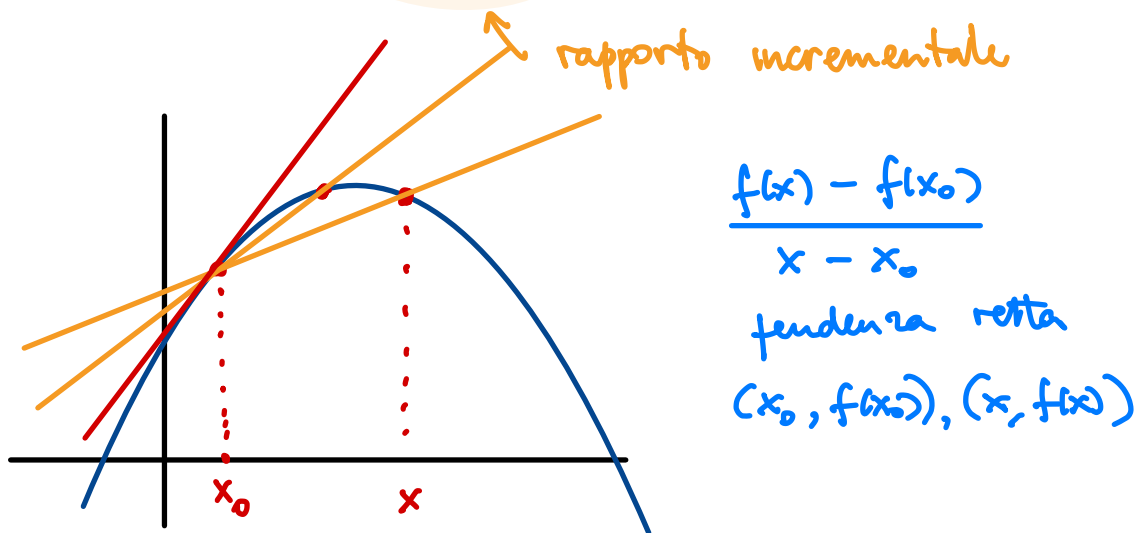
FUNZIONI DERIVABILI

Data $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$

Diciamo che f è derivabile in x_0

se esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$



in generale rette passanti per $(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

se questa passa per $(x_1, f(x_1))$ allora.

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Donque quando "passo al limite"

$$x_1 \rightarrow x_0$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

retta tg
al grafico
in $(x_0, f(x_0))$.

Se f è derivabile in x_0 allora

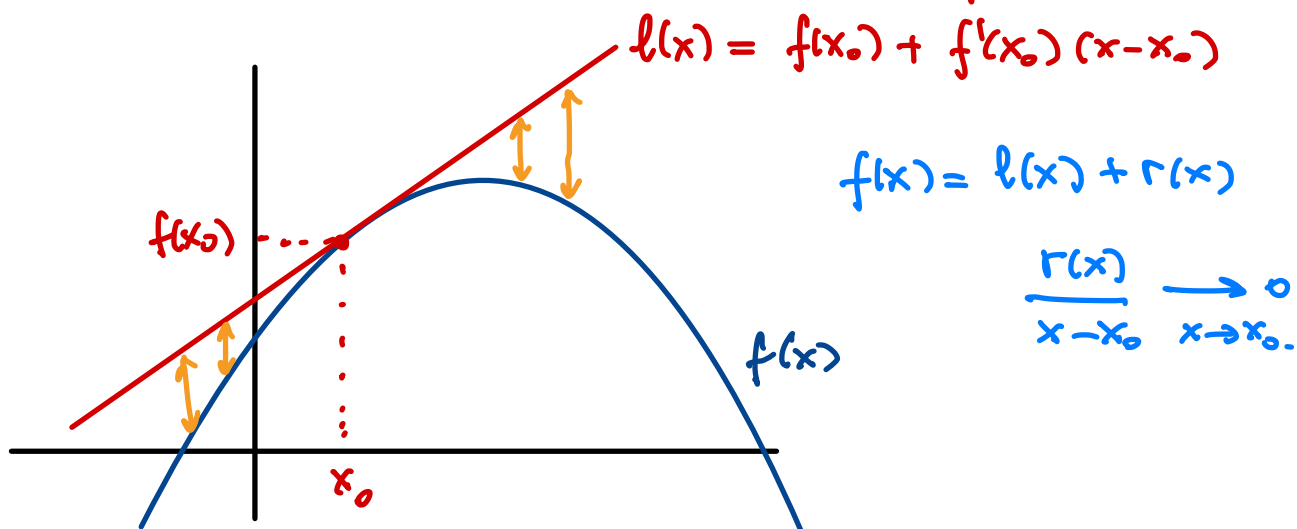
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

ovvero

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

se f è derivabile allora vale questa id.



Oss Se f è derivabile in x_0 allora la quantità

$$r(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$$

(che soddisfa $r(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0 \forall m \in \mathbb{R}$)

ha la proprietà $r(x) = o(x - x_0)$

per un unico valore di $m = f'(x_0)$.

Proposiz Sia $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in]a, b[$

Allora f è continua in x_0 .

dim Se f è derivabile allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{x - x_0}_0 = 0$$

cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

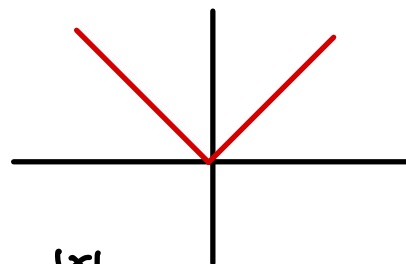
Esistono situazioni di non derivabilità (anche per f continue).

① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = |x|$$

è continua su $\mathbb{R}$

non è derivabile in $x_0 = 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 & \text{derivata dx} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 & \text{derivata sx.} \end{cases}$$

non esiste

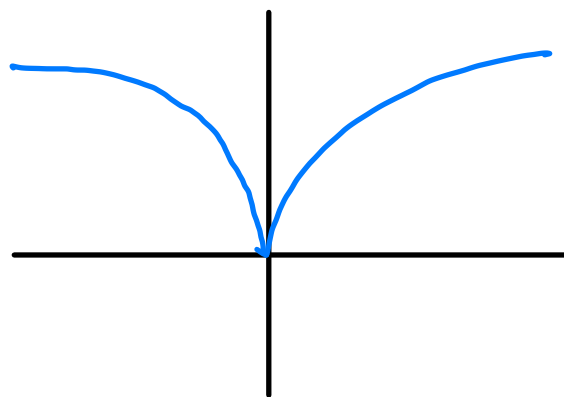
2

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{|x|} = |x|^{1/2}$$

f è continua in $\mathbb{R}$

non è derivabile in $x_0 = 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \dots = -\infty \end{cases}$$

3

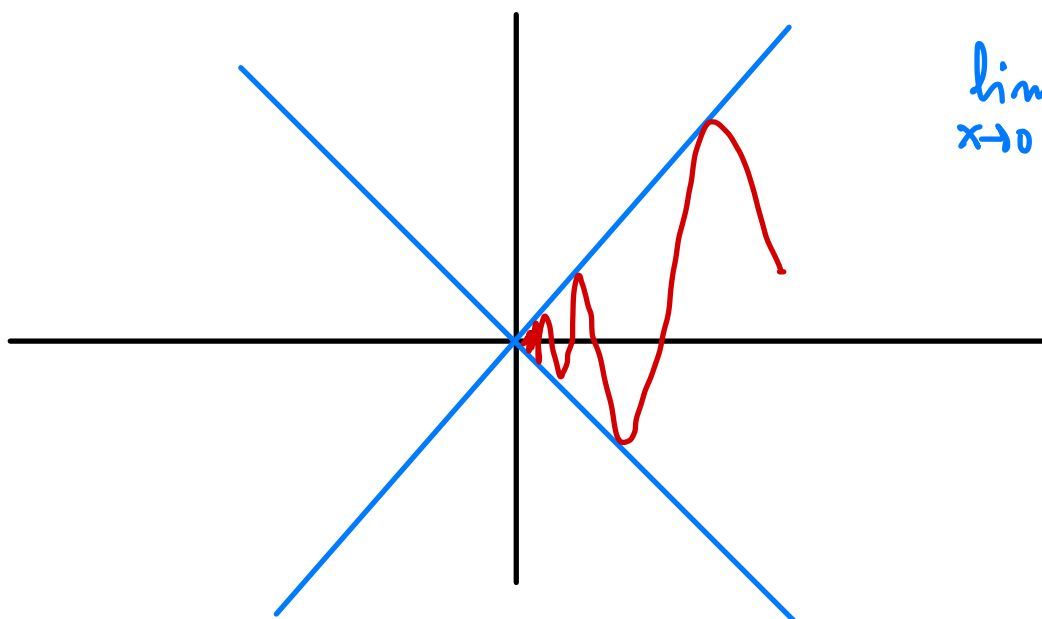
$$\text{Sia } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Nota che f è continua su $\mathbb{R}$. Infatti:
per $x \neq 0$ è comp. di funzioni continue.
in $x_0 = 0$ vale

$$0 \leq \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{non esiste.} \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Proposizione siano $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$
entrambe derivabili in $x_0 \in]a, b[$. Allora,

(i) $f + g$ è derivabile in x_0

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(ii) $f \cdot g$ è derivabile in x_0

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

Formula di Leibnitz.

(iii) $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 se $g(x_0) \neq 0$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

dim (i) fare per esercizio.

(ii) Per il prodotto

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\downarrow g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{\text{cost.}} \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow g'(x_0)} \\&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

(iii) Basta farlo per $\frac{1}{g}$. Calcoliamo.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}}_{\text{arrow } -g'(x_0)} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\&= - \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\end{aligned}$$

Poi uso la regola del prodotto. $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$.

Oss Esistono altre notazioni per la derivata

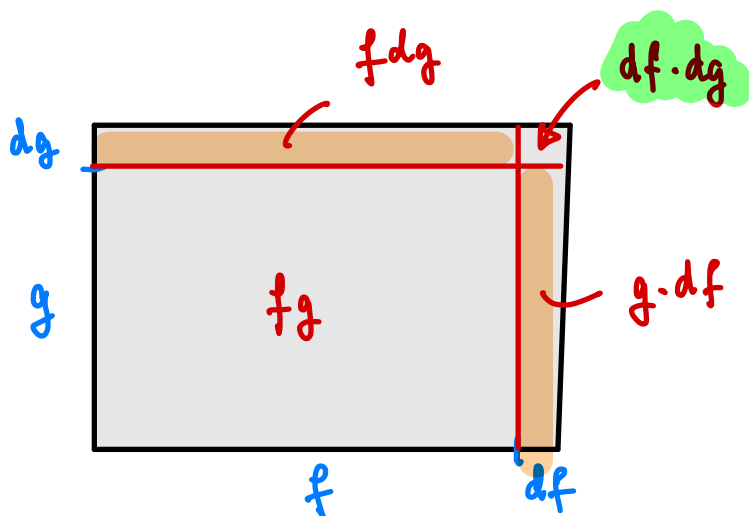
$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Δ = diff. discreta

d = diff. infinitesima.

$$(f + df)(g + dg) = fg + (f dg + g df) + \cancel{df \cdot dg}$$



$$d(fg) = f dg + df \cdot g.$$

Esercizio Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $x_0 \in \mathbb{R}$
verificare che se $\exists a_0, a_1 \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

implica che f è derivabile in x_0 e

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x_0) = a_1$$

Derivate delle funzioni elementari

① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^n$

Allora f è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = n x_0^{n-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = (*)$$

uso

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ &= n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

$$\triangleright f(x) = f'(x)$$

oss Possiamo scrivere $\triangleright x^n = n x^{n-1}$

② $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x$

è derivabile $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad f'(x_0) = \cos x_0$

Possiamo scrivere $\triangleright \sin(x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Per vederlo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} =$$

$x = x_0 + h$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h) - \sin(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \frac{\sin(h)}{h}$$

$\downarrow h \rightarrow 0$
0

$\downarrow h \rightarrow 0$
1

$$= \cos(x_0) .$$

$f(x)$	$f'(x)$	dominio
x^m	$m x^{m-1}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(*)

(*)

$$f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{è derivabile } \forall x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} < \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

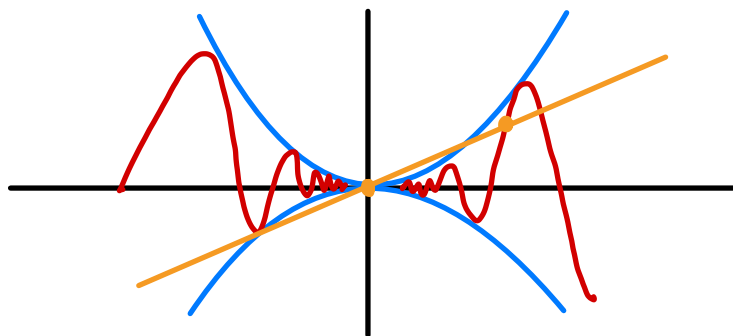
Esempio (interessante!)

$$\text{Sia } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0. \end{aligned}$$



La funzione $\bar{f}$ è anche derivabile per $x_0 \neq 0$.

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \quad (fg)' = f'g + fg'$$
$$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = (*)$$

dimostreremo tra poco

$$D x^{-1} = -1 x^{-2}.$$

$$D \sin(f(x)) = \cos(f(x)) \cdot f'(x).$$

da cui

$$D \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \underbrace{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{non ha limite per } x \rightarrow 0}$$

Notiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ non esiste!

! Questa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

è derivabile in $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ con

$$f'(0) = 0 \quad \text{ma} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \text{ non esiste!}$$

f è derivabile ovunque ma non C^1

def Se $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in D
diciamo che è di classe C^1 se la
funzione $f': D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f'(x)$
è continua.

Teorema (derivata della f. composta)

Sia $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$
tali che $f(]a, b[) \subseteq]c, d[$ $\exists g \circ f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$

Se f è derivabile in $x_0 \in]a, b[$

se g è derivabile in $y_0 = f(x_0) \in]c, d[$

Allora $g \circ f$ è derivabile in $x_0 \in]a, b[$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

esempio $\triangleright \sin(f(x)) = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

$$\triangleright e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Un caso particolare : se $g = f^{-1}$ (nel caso
in cui f sia invertibile)

$$\text{In questo caso } f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x.$$

$$\text{dunque } (f \circ f^{-1})'(x) = 1 \quad \forall x.$$

Corollario $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

possiamo scriverla

$$\triangleright f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

dove $y = f(x)$.

Esempio (facile ma per capire!)

Considero $f:]0, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$x_0 = 1$$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(1)}$$

$f(1) = 2$

$$f(x_0) = f(1) = 2 = y_0$$

$$f'(x_0) = 2 \cdot x_0 = 2 \cdot 1 = 2$$

Possiamo calcolare

$$g = f^{-1}$$

$$y = x^2 + 1$$

$$y - 1 = x^2$$

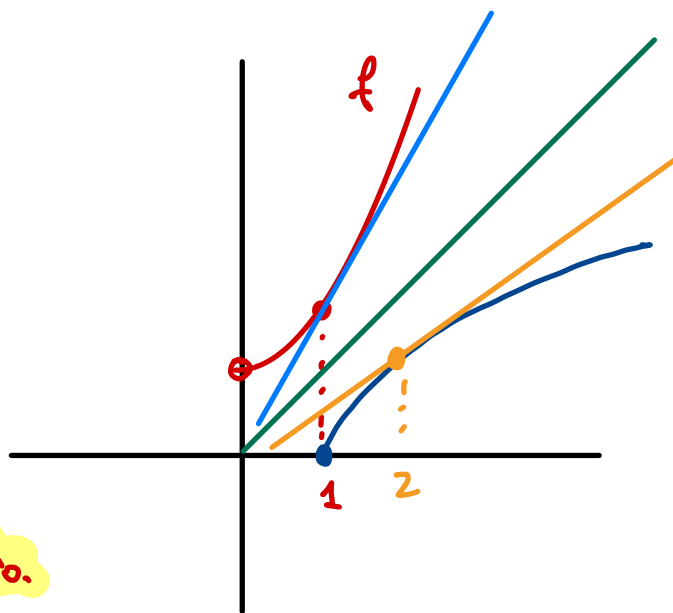
$$x = \sqrt{y - 1}$$

uso il dominio e codominio.

$$g(y) = \sqrt{y - 1}$$

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}$$

$$g'(y_0) = g'(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{f'(x_0)}$$



$$\triangleright \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$x > 0$

$$\triangleright x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

osserviamo che l'inversa di una funzione lineare $y = mx + p$ è del tipo

$$y - p = mx$$

$$x = \frac{1}{m} y - \frac{p}{m}$$

quindi il coeff angolare dell'inversa è l'inverso del coeff angolare.

Derivate delle inverse trigonometriche

$$\sin \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$$

è invertibile e definisce

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$D \arcsin x$

$$= \frac{1}{D \sin y} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

In maniera analoga per $\arccos x$, $\arctan x$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Esercizi Verificare che

$$x \in \mathbb{R} \quad D a^x = a^x \log a \quad (a \neq 1, a > 0)$$

$$x > 0 \quad D x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

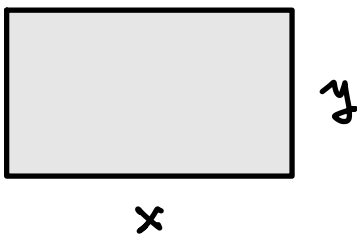
Calcolare poi $D \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

MASSIMI E MINIMI

Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato quale ha l'area maggiore?

P = perimetro del rettangolo

A = area del rettangolo



$$2x + 2y = P$$

$$x + y = \frac{P}{2}$$

$$y = \frac{P}{2} - x$$

$$A = xy = x \left(\frac{P}{2} - x \right)$$

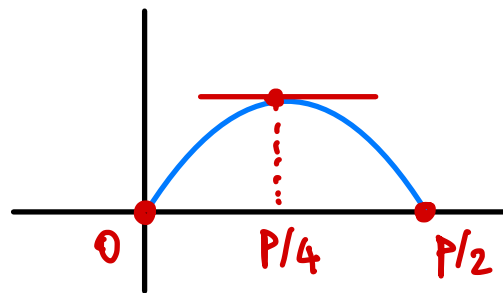
$$A(x) = x \left(\frac{P}{2} - x \right) = \frac{P}{2}x - x^2$$

$$0 \leq x \leq \frac{P}{2}$$

$$A(0) = 0$$

$$A\left(\frac{P}{2}\right) = 0$$

$$A\left(\frac{P}{4}\right) = \frac{P^2}{16}$$



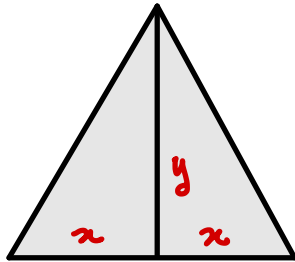
Per ogni rettangolo di perimetro P e area A vale

$$P^2 \geq 16A$$

e vale l'uguaglianza se e solo se il rettangolo è un quadrato.

Extra: PROBLEMA ISOPERIMETRICO TRIANGOLO

Con argomenti geometrici si può ridurre che il problema ai triangoli isosceli



$$2x + 2\sqrt{x^2 + y^2} = p$$

$$xy = A$$

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = x^2 + y^2$$

$$A(y) = \frac{1}{p} \left[\frac{p^2}{4} - y^2 \right] y$$

$$\frac{p^2}{4} + \cancel{x^2} - px = \cancel{x^2} + y^2$$

$$x = \frac{1}{p} \left[\frac{p^2}{4} - y^2 \right]$$

polinomio di grado 3.

$$\text{dominio } 0 \leq y \leq \frac{p}{2}$$

$$A(0) = A\left(\frac{p}{2}\right) = 0.$$

nota

$$\begin{aligned} A'(y) &= \frac{1}{p} \left[\frac{p^2}{4} - y^2 \right] - \frac{2}{p} y^2 \\ &= \frac{p}{4} - \frac{3}{p} y^2 \end{aligned}$$

ora

$$\begin{aligned} A'(p) = 0 &\iff \frac{p}{4} - \frac{3}{p} y^2 = 0 \\ &\iff y^2 = \frac{p^2}{12} \\ &\Rightarrow y_0 = \frac{p}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

notare

$$A(y_0) = \frac{1}{\cancel{P}} \left[\frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{12} \right] \frac{\cancel{P}}{2\sqrt{3}}$$
$$= \frac{P^2}{12\sqrt{3}}$$

Corollario Sia A l'area di un triangolo di perimetro P . Allora

$$P^2 \geq 12\sqrt{3} A$$

e vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow$ triangolo equilatero.

Dal punto di vista teorico

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

per il T. Weierstrass $\Rightarrow \exists \max_{[a, b]} f$, $\exists \min_{[a, b]} f$.

Teorema (di Fermat)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\bar{x}$ derivabile in $x_0 \in]a, b[$
e x_0 punto di massimo o minimo
locale per f . Allora $f'(x_0) = 0$.

Ricordiamo che data $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diciamo
che x_0 $\bar{x}$

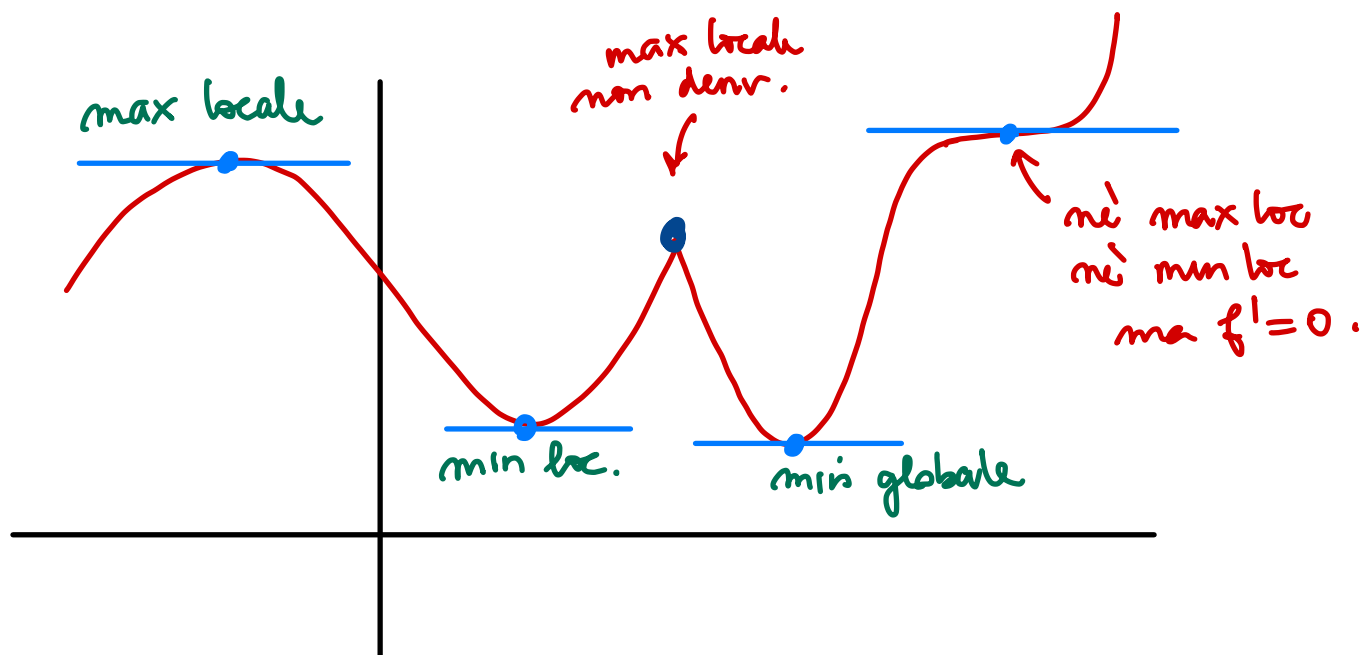
•) minimo locale se $\exists \delta > 0$ tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{per } x \in I(x_0, \delta) \cap D.$$

•) massimo locale se $\exists \delta > 0$ tale che

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{per } x \in I(x_0, \delta) \cap D$$

Parliamo di minimo globale e massimo globale
se la disuguaglianza vale per ogni $\delta > 0$.
(cioè su tutto il dominio).



dim Supponiamo x_0 ^(*) massimo locale

allora $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I(x_0, \delta)$

Per ipotesi $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ per } (*) \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$

≥ 0 per $x \rightarrow x_0^+$

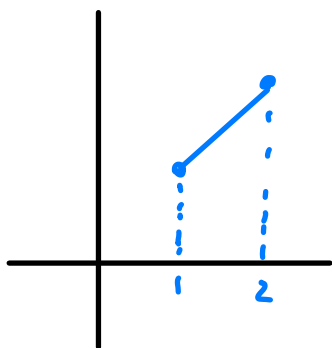
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ per } (*) \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

≤ 0 per $x \rightarrow x_0^-$

Esempi ①

$$f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$



$x_0 = 1$ minimo globale

$$f'(x) = 1 \quad \forall x \in]1, 2[$$

x_0 è un estremo dell'intervallo

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

②

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

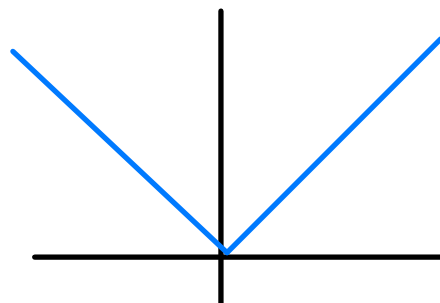
$$f(x) = |x|$$

continua in $\mathbb{R}$. $x_0 = 0$ minimo globale

f non è derivabile in $x_0 = 0$

$$\exists f'_+(x_0) = 1$$

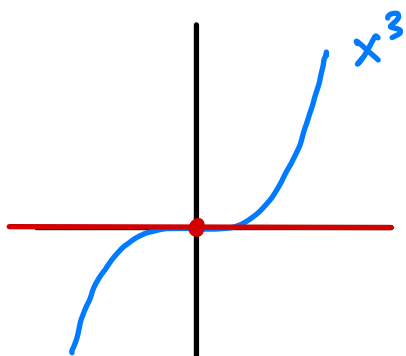
$$\exists f'_-(x_0) = -1$$



③

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 \quad x_0 = 0$$



Qui x_0 è t.c. $f'(x_0) = 0$
ma x_0 non è nè max
nè min.

Da questo teorema ne abbiamo

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

f continua

f derivabile in $]a, b[$

$\Rightarrow$

$$\exists \max_{[a, b]} f, \exists \min_{[a, b]} f$$

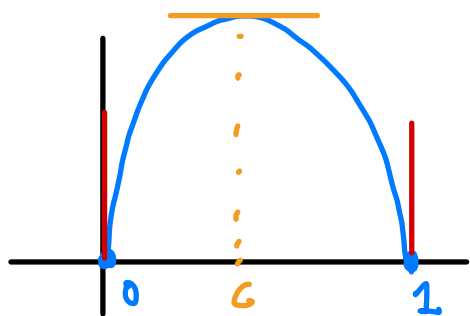
e abbiamo le possibilità

•) nei punti a, b

•) in pts interni

$$\text{dove } f'(x) = 0$$

punti critici



Teorema (di Rolle)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile in $]a, b[$.

Se $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$.

dim

Per il Teo. Weierstrass esistono $x_m, x_M \in [a, b]$

tal che $(*) f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]$.

Due possibilità:

•) $x_m, x_M \in \{a, b\}$ (sono estremi di $[a, b]$)

in questo caso $f(a) = f(b) \Rightarrow f(x_m) = f(x_M)$

Dalla $(*)$ f è costante su $[a, b]$

Pertanto $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$.

•) almeno uno tra x_m, x_M cade in $]a, b[$
supponiamo che sia x_m

Per ipotesi f è derivabile in x_m e
per il T. Fermat vale $f'(x_m) = 0$.

Esempio Consideriamo l'equazione

$$P(x) = x^3 + 3x + 3 = 0$$

Questa equazione ha almeno una soluzione
in $\mathbb{R}$ (teorema valori intermedi)

Infatti ne ha esattamente una. Se avesse
due soluzioni reali distinte allora

$$\exists x_1 \neq x_2 : P(x_1) = P(x_2) = 0$$

Ma questo per il teorema di Rolle
implicherebbe $P'(x) = 3x^2 + 3$
ha una soluzione. Contraddizione.

Teorema (di Lagrange)

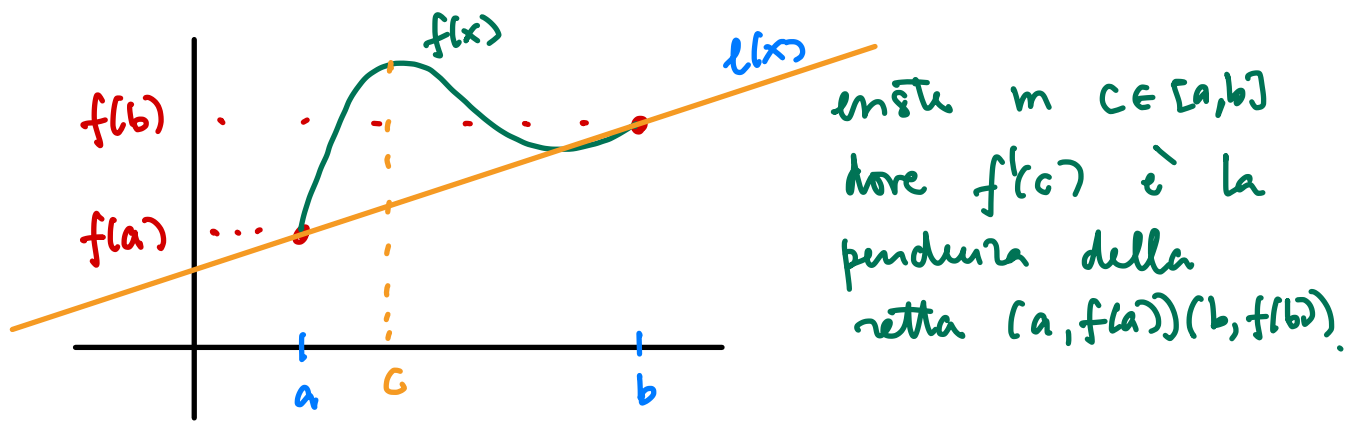
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, f derivabile in $]a, b[$.

Allora $\exists c \in]a, b[$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

$$\left(\text{e anche } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

Nota: $f(a) = f(b)$ con $a \neq b \Rightarrow f'(c) = 0$.



dim Consideriamo la funzione

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right]$$

$l(x)$ funzione che descrive la retta

g è continua e derivabile in $]a, b[$

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \underbrace{(a - a)}_0 + f(a) \right] = 0$$

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) + f(a) \right] = 0.$$

Quindi g soddisfa il T. Rolle ed $\exists c \in]a, b[$
tale che $g'(c) = 0$. D'altra parte

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollario Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e

f derivabile in $]a, b[$ con $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Allora $\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$

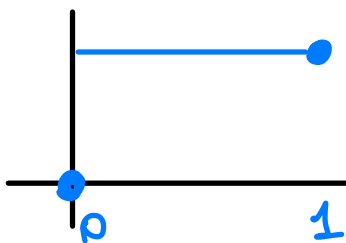
dim Applicando il T. Lagrange a

$[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$ con $x_1 < x_2 \quad \exists c \in]x_1, x_2[$.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$\text{ma } f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) .$$

Controesempi (A) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



definita per $x \neq 0$.

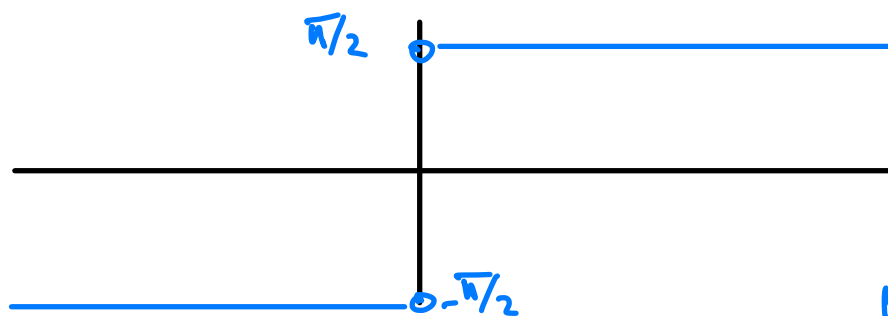
(B) Considero $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\begin{aligned} \text{calcolo } f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 . \end{aligned}$$

D'altra parte f non è costante perché

$$f(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2} \quad f(-1) = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

f è costante su $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ ma ha valori diversi sui due intervalli.



$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

APPLICAZIONE

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

ossia
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)}_{u_n}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

$f_n(0) = 1$
 $f_n(1) = \frac{u_n}{e}$

f_n è continua su $[0, 1]$, derivabile su $]0, 1[$

$$f'_n(x) = -e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$+ e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

dunque
$$f'_n(x) = -e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

segue

$$|f'_m(x)| \leq \left| e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$$

perché $x \in [0, 1] \Rightarrow |e^{-x}| \leq 1, |x^n| \leq 1.$

Per il Teo Lagrange vale per $c \in]0, 1[$
dipende da n .

$$f_m(1) - f_m(0) = f'_m(c) (1-0)$$

$$\Rightarrow |f_m(1) - f_m(0)| \leq \frac{1}{n!}$$

$$\text{ovvero } 0 \leq \left| \frac{u_m}{e} - 1 \right| \leq \frac{1}{n!}$$

$$\text{ne deduco } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_m}{e} = 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_m = e$$

Corollario (del T. Lagrange)

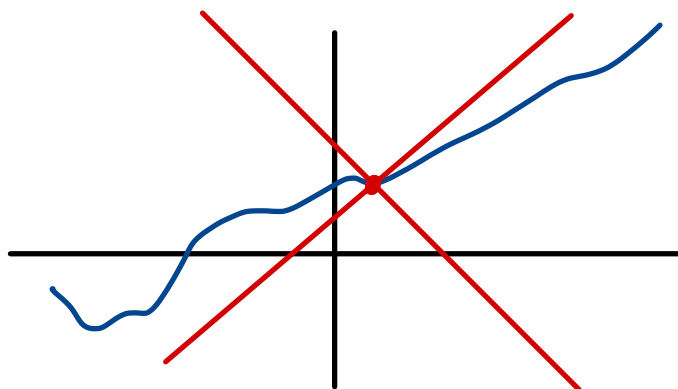
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile in $]a, b[$

Allora se vale

$$M = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| < +\infty.$$

si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$



f Lipschitziana.

Averanno visto l'esempio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ ma $f'(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$
non esiste.

Corollario Data $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile in $]a, b[\setminus \{x_0\}$. Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$



dim Ragiono per $x > x_0$ (l'altro caso analogo)
Per il teorema di Lagrange su $[x_0, x]$.

$$f(x) - f(x_0) = f'(c_x) (x - x_0) \quad \underline{x_0 < c_x < x}$$

c_x dipende da x

$$\text{cioè } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$$

se $x \rightarrow x_0^+$ allora $c_x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f'(c_x) = L.$$

$$\text{cioè } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

Si può usare anche con le funzioni
con le stesse ipotesi:

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = L_1 \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = L_2 \end{array} \right\} \underline{L_1 \neq L_2} \Rightarrow \boxed{f \text{ non è derivabile in } x_0}$$

Esercizio Sia $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile
supponiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

(diciamo che f ha asintoto orizzontale)

1) Mostrare che in generale NON VALE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \quad (*)$$

2) Mostrare poi che (*) vale se si

assume che $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.