

SUCCESSIONE PER RICORRENZA

Sono successioni (a_n) definite

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad f \text{ è una certa funzione.}$$

Ad esempio $f(x) = \sqrt{2+x}$

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$$

Per $\alpha = \sqrt{2}$ è la successione di prima

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} & a_2 &= \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ a_3 &= \sqrt{2+a_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Domanda: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$

Assumiamo che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$.

allora anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$

$$\text{quindi } a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Rightarrow L = \sqrt{2+L}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+L}.$$

$$L = \sqrt{2+L} \Rightarrow L = -1 \quad \text{o} \quad L = 2$$

ma essendo $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora necessariamente $L \geq 0 \Rightarrow L = 2$

Vediamo che $a_1 = \sqrt{2}$ $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$
soddisfa:

① $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. per induzione

$a_1 = \sqrt{2} \geq 0$ e se $a_n \geq 0$
allora $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \geq \sqrt{2} \geq 0$

$$(x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2+x} \geq 0)$$

② $a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Per induzione

$a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ se $a_n \leq 2$
allora $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$

③ a_n è monotona crescente.

voglio vedere $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n$.

In fatti ciò è vero se $\sqrt{2+a_n} \geq a_n$. (*)

(Per quali $x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{2+x} \geq x$?)

$$(*) \Rightarrow a_n \geq 0$$

$$2 + a_n \geq a_n^2$$

$$a_n^2 - a_n - 2 \leq 0.$$

D'altra parte $x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2].$

essendo $0 \leq a_n \leq 2 \Rightarrow a_n^2 - a_n - 2 \leq 0.$

Esercizio Studiare la convergenza della successione per valori di $\alpha > 2$ e vedere

-) $a_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
-) a_n monotona decrescente
-) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$

Esempio (algoritmo di Erone)

Dato $p > 0$ e dato $\alpha > \sqrt{p}$ definiamo

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + p}{2a_n} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{p}}$$

Osserviamo che se $\alpha \in \mathbb{Q}$ e $p \in \mathbb{Q}$ allora la successione a_n è a valori razionali.

•) Mostriamo che $a_n \geq \sqrt{p} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Essendo $a_1 = \alpha > \sqrt{p}$ vero per $n=1$

Assumo $a_n \geq \sqrt{p} \stackrel{?}{\Rightarrow} a_{n+1} \geq \sqrt{p}$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + p}{2a_n} \stackrel{?}{\geq} \sqrt{p}$$

mi chiedo $x \geq \sqrt{p} \Rightarrow \frac{x^2 + p}{2x} \geq \sqrt{p}$.

mi riservo il termine di destra ($x > 0$)

$$x^2 + p \geq 2\sqrt{p}x$$

$$x^2 - 2\sqrt{p}x + p \geq 0$$

$$(x - \sqrt{p})^2 \geq 0 \quad \leftarrow \text{sempre vero } \forall x \in \mathbb{R}.$$

•) Mostriamo che a_n è decrescente.

Voglio vedere $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Leftrightarrow \frac{a_n^2 + p}{2a_n} \leq a_n$$

$a_n > 0$

$$\Leftrightarrow a_n^2 + p \leq 2a_n^2$$

$$\Leftrightarrow a_n^2 - p \geq 0 \quad \leftarrow$$

sempre vero perché
 $a_n \geq \sqrt{p} \quad \forall n$.

Quindi a_n decrescente e limitata inf

Ne segue $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ e $L \geq \sqrt{p}$

Si come $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + p}{2a_n}$

ricorre $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L \Rightarrow a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ e $L \neq 0$

vale $L = \frac{L^2 + p}{2L}$

$$\Rightarrow 2L^2 = L^2 + p \Rightarrow L^2 - p = 0$$
$$\Rightarrow L = \sqrt{p} \text{ o } L = -\sqrt{p}.$$

SUCCESIONI DI CAUCHY

Def Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è detta di Cauchy se vale la proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

"da un certo po' un po' gli a_n sono vicini tra loro".

da confrontare con la def di $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

"da un certo po' un po' gli a_n sono vicini a L ".

Teorema Una successione è convergente se e solo se è di Cauchy.

definiamo prima le sottosuccessioni

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 $a_8 \dots$

$$k_1=1$$

$$k_2=3$$

$$k_3=6$$

$$k_4=7$$

→ ho costruito a_{k_m} succestratta.

dove $(k_m)_m$ crescente di naturali.

Def Data $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sottosuccessione di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione del tipo $(a_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ dove $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione strett. crescente a valori in $\mathbb{N}$.

es. $a_n = \underline{\underline{(-1)^n (n^2 + 1)}}$

$$a_1 = -2 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = -10 \quad \dots$$

costruisco la succ. estratta dei termini pari ovvero fisso $k_m = 2m$

$$a_{k_m} = a_{2m} = (-1)^{2m} ((2m)^2 + 1) = \underline{\underline{4m^2 + 1}}$$

Il teorema sull'unicità del limite
ci dice che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = L$$

$\forall (k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sottosec.

Questo è utile "in negativo"

Dato $(a_n)_n$ ho due sottosec.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k'_n} = L'$$

$$L \neq L' \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ non esiste!}$$

esempio $a_n = (-1)^n$

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1$$

Notiamo che a_n è limitata
che non ha limite ma
ammette sottosec. convergenti.

Teorema Ogni successione limitata
ammette una sottosucc. convergente.

esempio $a_n = \sin(n)$, $-1 \leq a_n \leq 1$

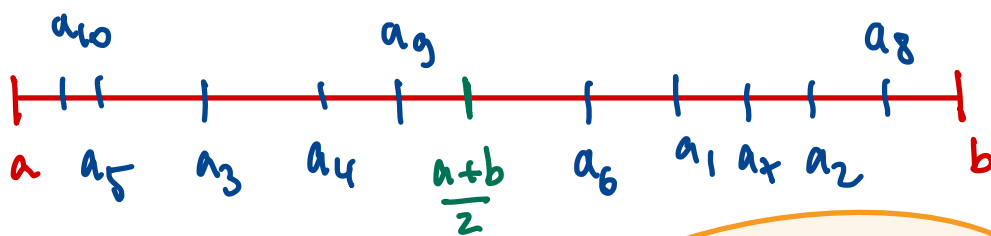
Per il teorema $\exists (k_n)_n$ tale che
 $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente.

Questo risultato, che ora dimostriamo,
è collegato al risultato che avevamo
solo enunciato:

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, limitato
e infinito, allora E ammette
almeno un punto di accumulazione.

Algoritmo di bisezione sia $a \leq a_n \leq b$



$$a \leq x \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq x \leq b$$

ma di queste due continue ad iterare!

dim (del teorema: limitato $\Rightarrow \exists$ sotto succ comr)

Denoto (x_n) la successione. Essendo per ipotesi limitata $a \leq x_n \leq b$ per qualche a, b .

Considero le due metà $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ ed almeno una di queste due metà contiene infiniti termini della successione $(x_n)_n$. Denotiamo tale metà con $[a_1, b_1]$ e fissiamo k_1 tale che $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$.

Ragionando come sopra esiste un intervallo tra le due metà $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ che contiene ∞ termini di $(x_n)_{n \geq k_1}$.

lo chiamo $[a_2, b_2]$ e scelgo $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$.

Iterando costruisco una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ tali che

$$\text{length}([a_n, b_n]) = \frac{1}{2} \text{length}([a_{n-1}, b_{n-1}])$$

e un elemento $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$,

con $(k_n)_n$ monotonica crescente.

Abbiamo

-) a_n monotona crescente
-) b_n monotona decrescente
-) $a \leq a_n \leq b_n \leq b$

ovvero

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \tilde{a}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \tilde{b}$$

D'altra parte $|b_n - a_n| = \frac{1}{2} |b_{n-1} - a_{n-1}|$

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{2^n} |b - a|$$

ovvero $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \tilde{b} - \tilde{a}$

ma anche $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |b - a| = 0$.

ne segue $\tilde{a} = \tilde{b}$. Denoto $L = \tilde{a} = \tilde{b}$

Essendo $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$ si ha $a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$

dunque per il teorema dei due carabinieri

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = L,$$

Dimostrazione (Cauchy $\Leftrightarrow$ convergente)

① Convergente $\Rightarrow$ Cauchy

Per ipotesi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\text{ora se } n, m \geq n_0 \Rightarrow \begin{aligned} |a_n - L| &< \varepsilon \\ |a_m - L| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dunque } |a_n - a_m| &\leq |a_n - L + L - a_m| \\ &\leq |a_n - L| + |a_m - L| \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

che dimostra che $(a_n)_n$ è di Cauchy.

② Cauchy $\Rightarrow$ convergente

Per ipotesi (a_n) è di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(*)

Faremo come segue:

(a) $(a_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow (a_n)_n$ limitata

(b) per il teo prec $\exists a_{k_m} \rightarrow L \quad L \in \mathbb{R}$

(c) tutta la succ. $a_n \rightarrow L$.

a) vediamo che $(a_n)_n$ è limitata.

Fisso $\varepsilon = 1$ e quindi da (*) so che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < 1$$

$$\text{In particolare } \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a_{n_0}| < 1$$

$$\text{ne segue } \forall n \geq n_0 \quad a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$$

oppure possiamo dire

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq 1 + |a_{n_0}| \quad \forall n \geq n_0$$

Essendo (a_n) limitata per $n \geq n_0$ allora
 (a_n) limitata $\forall n \in \mathbb{N}$ infatti

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$$

b) Per il teorema di Bolzano-Weierstrass

$$\exists (k_m)_m : \lim_{m \rightarrow \infty} a_{k_m} = L \in \mathbb{R}.$$

c) Voglio mostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$

"non solo la sottoseq. converge ma tutte le succ. conv".

Devo mettere insieme due cose:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{Cauchy}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow |a_{k_n} - L| < \varepsilon$$

sett. conv.

Prendiamo ora $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ considero

$$|a_n - L| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - L|$$

$$\begin{matrix} n \geq n_0 \\ k_n \geq n_0 \end{matrix} \leq \underbrace{|a_n - a_{k_n}|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|a_{k_n} - L|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

(Noto che $(k_n)_n$ succ. stretta. crescente a valori in $\mathbb{N}$ dunque $k_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

Corollario $(a_n)_n$ convergente $\Rightarrow (a_n)_n$ limitata.

Costruzione di $\mathbb{R}$ tramite successioni di Cauchy in $\mathbb{Q}$.

$$\sqrt{2} = 1,414 \dots \quad \begin{matrix} a_1 = 1 & a_3 = 1,41 \\ a_2 = 1,4 & a_4 = 1,414 \dots \end{matrix}$$

$$\mathbb{R} = \{ (a_n)_n \text{ a valori in } \mathbb{Q} \text{ di Cauchy} \}$$

con la relazione di equivalenza

$$(a_n)_n \sim (b_n)_n \text{ se } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

7

FUNZIONI CONTINUE

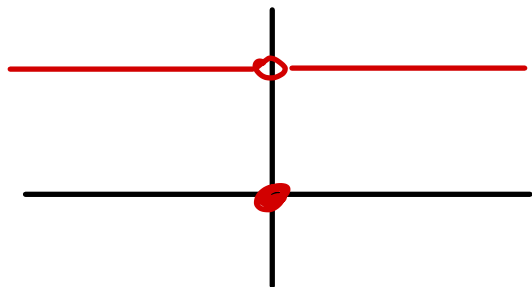
Def Sia $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diciamo che f è continua in $x_0 \in D_f$ se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diciamo che f è continua su $A \subseteq D_f$ se f è continua in x_0 , $\forall x_0 \in A$.

es la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$0 = f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

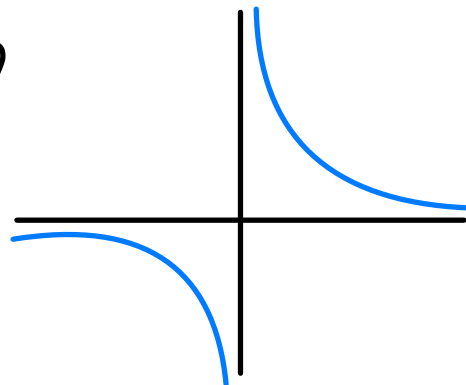
OSS Ha senso chiedersi se f è continua in x_0 solo se $x_0 \in D_f$ e allora tutto dipende da x_0 pto di acc. per D_f .

$f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $x_0 = 0$?

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$0 \notin D_f$$

non ha
senso...



Possiamo però porci questa domanda:
 data $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ posso chiedermi
 se $\exists \tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

sia continua per un certo valore di $a \in \mathbb{R}$

ad es. se definito $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (lo vedremo dopo)

ma può essere anche estesa a

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Oss Se $x_0 \in D_f$ ma non è di acc.

per convenzione diciamo che f è continua in x_0

← più violato del dominio.

$$f:]-\infty, 1] \cup \{3\} \cup]4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \tilde{f} \text{ continua in} \\ x_0 = 3 \end{matrix}$$

Riprendiamo la definizione (cioè $x_0 \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall c.$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

↑
con il teorema operazioni sui limiti avevamo
dimostrato che i polinomi soddisfanno.

I polinomi sono funzioni continue su $\mathbb{R}$

Può in generale si può dimostrare che le
funzioni elementari che abbiamo considerato:
trigonometriche, esponenziali, logaritmi
sono continue nei loro domini di def.

Come conseguenza del teorema sulle operaz.
sui limiti:

$$\begin{array}{l} f, g \text{ continue in } x_0 \\ f, g: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x_0 \in D \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f+g \text{ continua in } x_0 \\ fg \text{ continua in } x_0 \\ \frac{f}{g} \text{ continua in } x_0 \\ \text{se } g(x_0) \neq 0. \end{array} \right.$$

Ad es

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin x + \frac{3x+2}{2^x+1} - x^2$$

$\bar{f}$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$

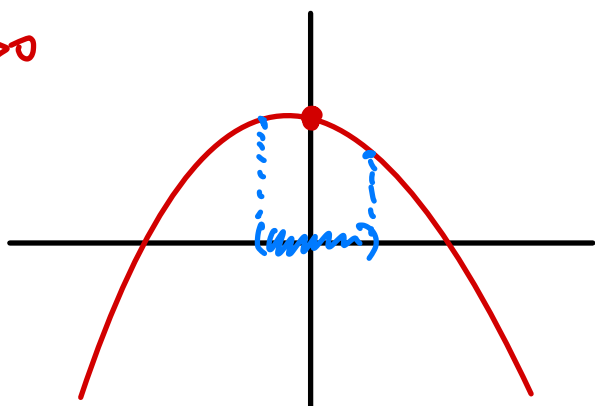
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 > 0$$

Teorema (permanenza del segno, f continua)

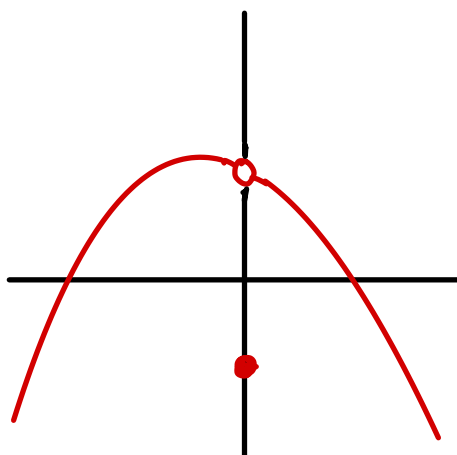
Sia $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in D_f$
tale che $f(x_0) > 0$. (risp $f(x_0) < 0$)

Allora esiste $\delta > 0$: per $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
si ha $f(x) > 0$. (risp $f(x) < 0$)

$f(0) > 0$



$f(0) < 0$



Il teorema del limite della f . composta
invece si traduce nella proprietà seguente

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
continua in $x_0 \in D_f$

$g: D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
continua in $y_0 \in D_g$

con $y_0 = f(x_0)$

} $\Rightarrow$

$g \circ f$ è continua
in x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)).$$

possiamo scrivere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right).$$

ad es. se f è una funzione continua in x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)} = e^{f(x_0)}.$$

Vale anche per le successioni: se g è una funzione continua e $x_n \rightarrow \bar{x}$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(\bar{x}) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right)$$

In realtà si può dimostrare che

f è continua in
 $x_0 \in D_f$

continuità

$\Leftrightarrow$

$\forall (x_n)_n$ successione in D_f
tale che $x_n \rightarrow x_0$
vale $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

continuità per successioni.

Questo è utile utilizzato come segue:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

questa f non può essere estesa a una
funzione continua $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Infatti sia $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ $y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$

Per entrambe $\lim_n x_n = \lim_n y_n = 0$.

Ma $f(x_n) = \cos(2\pi n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 dunque $f(x_n) \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$.

e $f(y_n) = \cos(2\pi n + \pi) = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 dunque $f(y_n) \rightarrow -1$ per $n \rightarrow \infty$.

Esempio (funzione di Dirichlet)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

f non è continua in nessun $x_0 \in \mathbb{R}$.

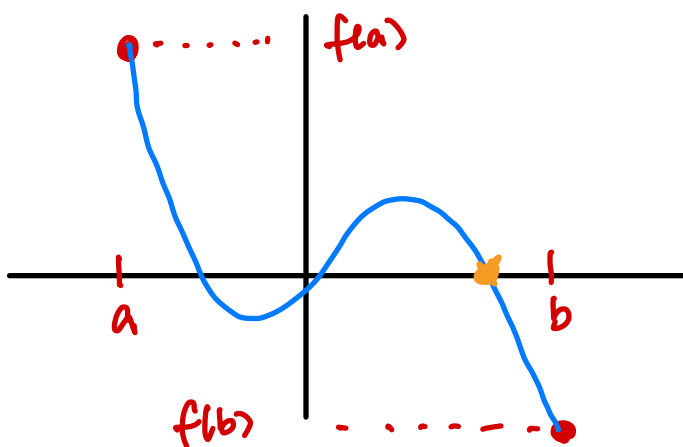
Il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste.

Teorema (degli zeri)

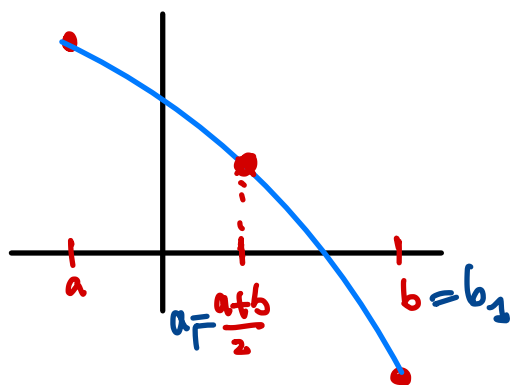
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \text{allora}$$

$$\exists c \in]a, b[\quad \text{tale che} \quad f(c) = 0.$$



dim basata su algoritmo di bisezione



$$f(a) f(b) < 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{notiamo } f(a) \neq 0 \\ f(b) \neq 0 \end{array} \right)$$

senza perdere gen. $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.

Considero $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

$$\text{Se } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}.$$

$$\text{Se } f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow \text{scelgo } [a, \frac{a+b}{2}] \text{ o } [\frac{a+b}{2}, b]$$

l'intervallo in cui f ha segni opposti agli estremi. Chiamo $[a_1, b_1]$ questo intervallo.

Iterando il ragionamento, o ad un certo step trovo un valore dove $f=0$, oppure costruisco una succ. di intervalli:

$[a_n, b_n]$ definiti da $(a_n)_n, (b_n)_n \text{ t.c.}$

$$\bullet) \quad a_n \uparrow \quad \text{e} \quad f(a_n) > 0.$$

$$\bullet) \quad b_n \downarrow \quad \text{e} \quad f(b_n) < 0.$$

$$\bullet) \quad a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet) \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \bar{a} \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \bar{b}$$

$$\bar{b} - \bar{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

quindi $\bar{a} = \bar{b}$ e lo denoto $\bar{x}$

$$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq 0 \\ f(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$$

Esempio Mostrare che l'equazione

$$x^3 = \cos x$$

ha almeno una soluzione in $\mathbb{R}$.

Nota che $x^3 = \cos x \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$f(x) = x^3 - \cos x$$

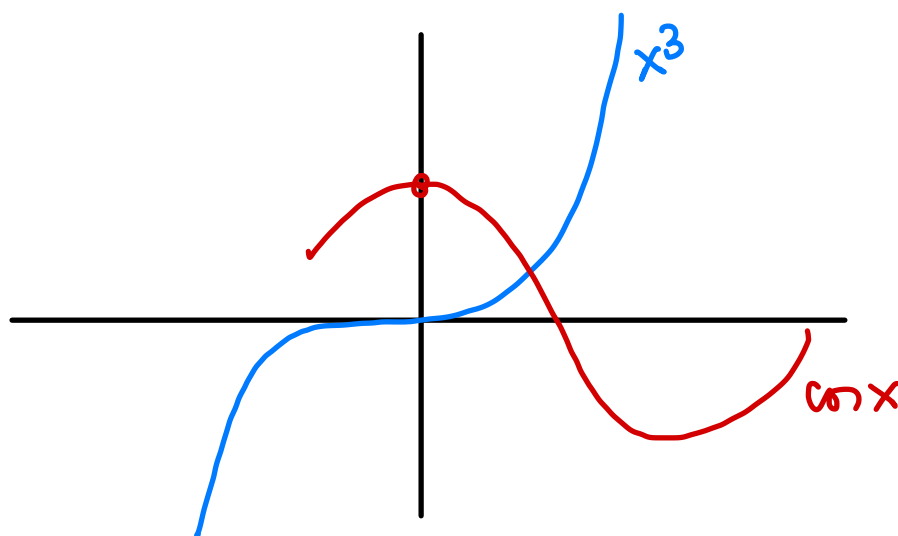
Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - \cos x$

f è continua

Posso notare che $f(0) = 0 - 1 = -1 < 0$,

mentre $f(2) = 2^3 - \cos 2 \geq 7 > 0$.

Quindi f ha uno zero in $[0, 2]$.



Applicazione Ogni equazione algebrica del tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

con $a_n \neq 0$ e n dispari
ammette almeno una soluzione reale.

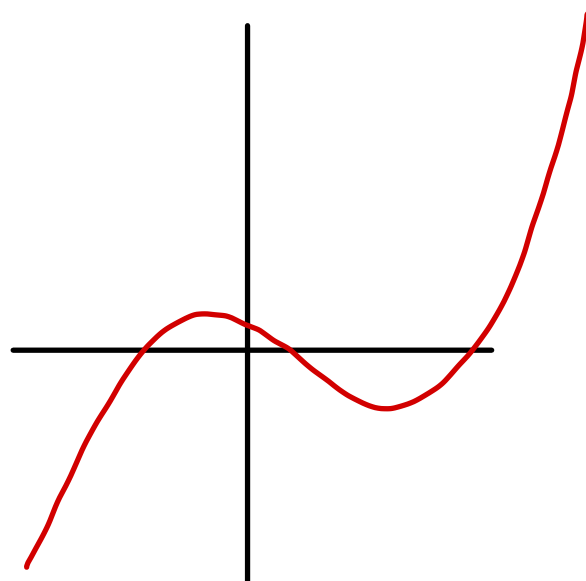
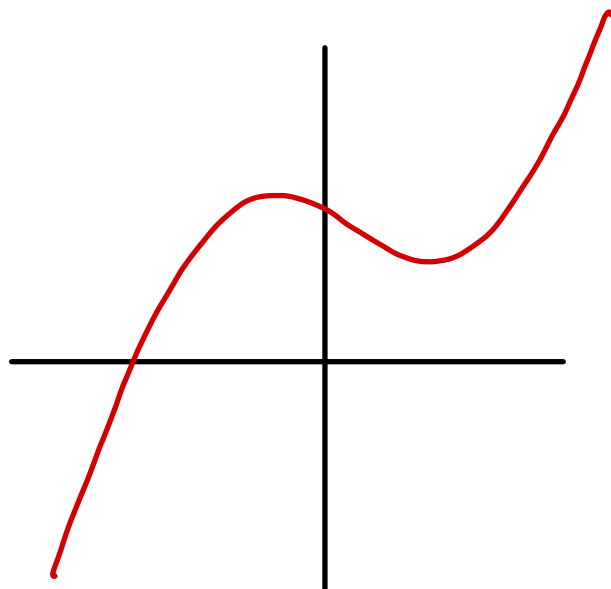
In fatti, supponiamo ad es. $a_n > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \stackrel{(*)}{=} +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) \stackrel{(**)}{=} -\infty.$$

$$\exists x_1 < 0 : P(x_1) < 0 \quad \text{segue da } (**)$$

$$\exists x_2 > 0 : P(x_2) > 0. \quad \text{segue da } (*)$$

Pertanto $P(x) = 0$ per qualche $x \in [x_1, x_2]$.



Esercizio Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^2 \cos x - 3x \sin x + 5$$

Mostrare che f si annulla infinite volte.

Teorema (dei valori intermedi)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Se ad es. $f(a) \leq f(b)$ allora

$\forall y \in \mathbb{R}$, $f(a) \leq y \leq f(b)$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$

