

UNITÀ NOTevoli E 0 - PICCOLO

Per ora annunciamo

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} =: e \quad \text{numero di Eulero.}$$

e lo dimostreremo in seguito.

Da questo potremo dedurre, indicando $\log(x)$ e $\log_e(x)$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1+x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{la poteri per cov.}$$

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e \\ \text{per } x \rightarrow 0$$

$$= \lim_{y \rightarrow e} \log(y) \stackrel{=}{=} \log(e) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x} = 0$$

$$\log(1+x) - x = o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\log(1,01) = \log(1+0,01) = 0,01 + \dots$$

$\uparrow o(x)$

$$\log(2) = \log(1+1) \neq 1$$

vero valore $\log(2) = 0,693 \dots$

②

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

cambio var

$$y = e^x - 1$$

$$y+1 = e^x$$

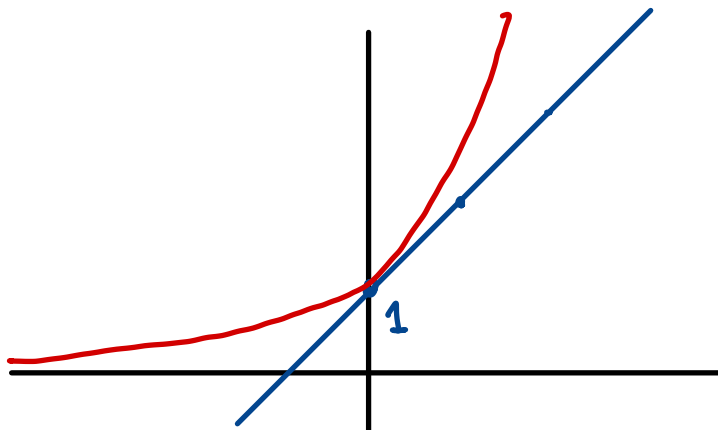
$$\log(1+y) = x$$

$$\downarrow$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$$

quindi $e^x - 1 = x + o(x)$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$



3

dato $\alpha \in \mathbb{R}$ vediamoD17
 $\alpha \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$y = \log(1+x) \Leftrightarrow e^y = 1+x \Rightarrow (1+x)^\alpha = e^{\alpha y}.$$

$$x = e^y - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha y} \cdot \frac{y}{e^y - 1} \cdot \alpha = \alpha.$$

deduciamo

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x).$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x).$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{102} = 10 \sqrt{1,02} \approx 10 \left(1 + \frac{0,02}{2} \right) = 10(1,01) = 10,1.$$

$$10,0995$$

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4}$$

LIMITI INFINITI

Ricordiamo che per $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (\Leftrightarrow) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \\ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \\ \Rightarrow f(x) \in I(L, \varepsilon).$$

$(\Leftrightarrow)$ per ogni intorno I_L di L , esiste I_{x_0} int di x_0 tale che $x \in I_{x_0} \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_L$

Possiamo estendere la def a valori di x_0 ed L in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} =: \overline{\mathbb{R}}$.
($\overline{\mathbb{R}}$ inteso)

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{intorni} \quad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad \delta > 0$$

$$+\infty \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \text{intorno} \quad]M, +\infty[\quad M \in \mathbb{R}$$

$$-\infty \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \text{intorno} \quad]-\infty, k[\quad k \in \mathbb{R}.$$

(Nella def di limite possiamo restringerci a $M > 0$ e $k < 0$).

ad es $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ non ho bisogno di mettere $\{x_0\}$.

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists K \in \mathbb{R} : x \in]-\infty, K[\Rightarrow f(x) \in]M, +\infty[.$$

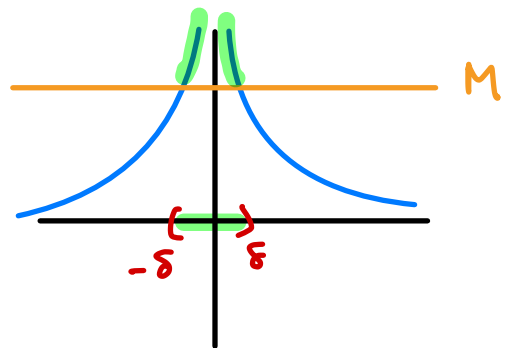
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists K \in \mathbb{R} : x < K \Rightarrow f(x) > M.$$

$$\forall M > 0 \quad \exists K < 0 : x < K \Rightarrow f(x) > M.$$

$$\forall M > 0 \quad \exists K > 0 : x < -K \Rightarrow f(x) > M.$$

esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$$f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M$$

$$M > 0, x^2 > 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M}$$

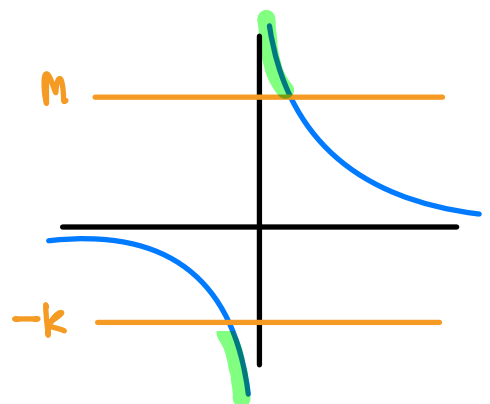
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}, \quad x \neq 0.$$

Basta prendere $\delta = 1/\sqrt{M}$.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ non esiste.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ non esiste

non scriviamo ~~$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$~~ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

"Dovremmo" dimostrare le estensioni dei teoremi precedenti a limiti infiniti

- unicità del limite in $\overline{\mathbb{R}}$
- permanenza del segno in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists I_{x_0} \text{ di } X_0 :$$

$\uparrow$
 $\overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) > 0 \quad x \in I_{x_0} \setminus \{x_0\}$$

- per le operazioni sui limiti
bisogna prestare attenzione alle ...
"FORME INDETERMINATE".

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$$

non posso stabilire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = ?$

Ad esempio per $c > 0$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + c$$

$$g(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + g(x) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

Enunciati analoghi valgono per il prodotto, per il quoziente e per la potenza. Possiamo riassumere tutti questi risultati in alcune tabelle, avvertendo che **quando ci sono sulla stessa riga due o più segni $\pm$ o $\mp$, si dovranno prendere sempre i segni in alto o sempre quelli in basso.**

1. Somma.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$
a	b	$a + b$
a	$\pm \infty$	$\pm \infty$
$\pm \infty$	$\pm \infty$	$\pm \infty$

Forma ind

$+\infty - \infty$

2. Prodotto.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$
a	b	ab
$a > 0$	$\pm \infty$	$\pm \infty$
$a < 0$	$\pm \infty$	$\mp \infty$
$\pm \infty$	$\pm \infty$	$+$
$\pm \infty$	$\mp \infty$	$-$

Forma ind

$0 \cdot +\infty$

$0 \cdot -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

3. Quoziente.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
a	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$
a	$\pm \infty$	0
$\pm \infty$	$a > 0$	$\pm \infty$
$\pm \infty$	$a < 0$	$\mp \infty$
$a > 0$	0	$\begin{cases} +\infty & \text{se } g(x) > 0^6 \\ -\infty & \text{se } g(x) < 0 \\ \text{Non esiste altrimenti} \end{cases}$
$a < 0$	0	$\begin{cases} -\infty & \text{se } g(x) > 0 \\ +\infty & \text{se } g(x) < 0 \\ \text{Non esiste altrimenti} \end{cases}$

$\frac{f(x)}{g(x)}$
 $\uparrow$
 $\downarrow$

$\frac{0}{0}$ $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$

⁶ Naturalmente basterà che $g(x) > 0$ in un intorno bucato di x_0 .

Oss Possiamo dimostrare ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \quad (\log)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad (\text{pol})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (\exp)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^{10})}{x^7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10} + o(x^{10})}{x^7}$$

② Deriviamo studiando $f(x)^{g(x)}$

$$\begin{aligned} f(x)^{g(x)} &= e^{\log f(x)^{g(x)}} \\ &= e^{g(x) \log f(x)} \end{aligned}$$

" $1^{+\infty}$ " " $+\infty^{+\infty}$ "
" $1^{-\infty}$ " " $-\infty^{+\infty}$ "

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \log f(x)}$$

noi basterà studiare $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \log f(x)$.

$$\begin{aligned} 0 \cdot +\infty \\ 0 \cdot -\infty \end{aligned}$$

esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\log(1+x)}}$$

" $+\infty^0$ "

esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos(x)$$

osserviamo intanto che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$ non esiste.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0^+ \\ y = \frac{1}{x}}} \cos\left(\frac{1}{y}\right) \text{ non esiste.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Posso dire che $x + \cos(x) \geq x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos(x) = +\infty.$$

"

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{e} \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$$

"

Prop. (limiti e disuguaglianze)

Siano $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ pto di acc. per D . Sappiamo che

$\exists I_{x_0}$ tale che $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$

Allora se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ $f(x) \geq g(x)$
 $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \in \overline{\mathbb{R}}$ $\Downarrow$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Allora $L \geq M$ $\leftarrow$ va inteso come disug. in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Oss.

Anche se abbiamo

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$$

possiamo solo dedurre

$$L \geq M$$

ad es $f(x) = \frac{1}{x}$ soddisfa $f(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0$

$$\text{ma} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Per $g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ abbiamo l'esempio in cui la dis. stretta non va al limite.

Oss Se $f(x) \geq g(x)$ in I_{x_0} e

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

l'esistenza è forata dalla dis.

Analogamente se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

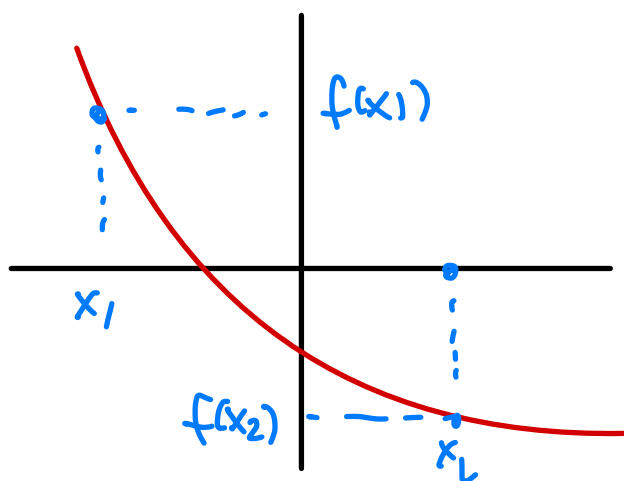
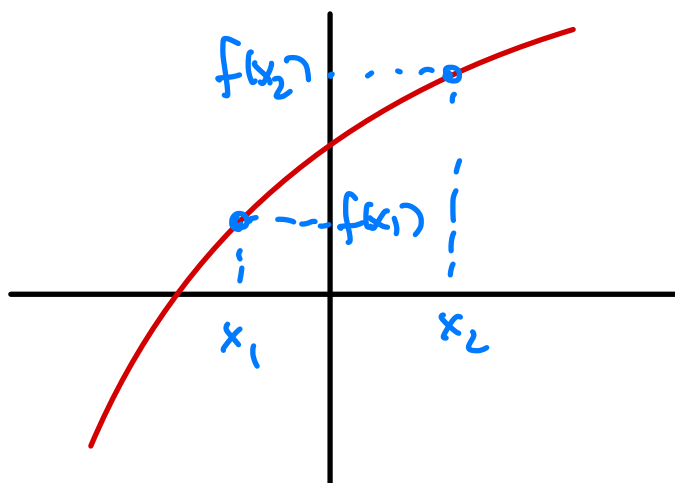
allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

FUNZIONI MONOTONE

def Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diciamo che

(i) f è monotona crescente se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
per ogni $x_1, x_2 \in D$

(ii) f è monotona decrescente se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
per ogni $x_1, x_2 \in D$



funzione crescente

$$x \mapsto e^x$$

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow e^{x_1} \leq e^{x_2}$$

$$(\forall a > 1 \quad a^{x_1} \leq a^{x_2})$$

$$\forall 0 < a < 1 \quad a^{x_1} \geq a^{x_2}$$

funzione decrescente

$$x \mapsto \frac{1}{x} \quad x \in]0, +\infty[$$

$$0 < x_1 \leq x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} \geq \frac{1}{x_2}$$

Oss Parliamo di funzione strettamente monotona se vale anche

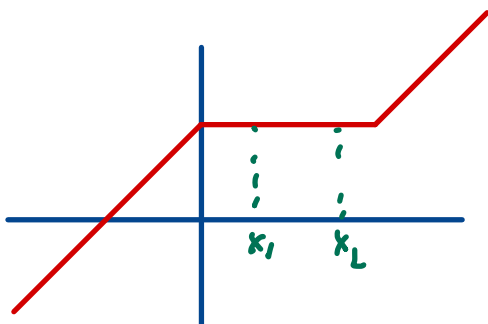
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1 \neq x_2$$

strett. decr.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

strett. crescente.

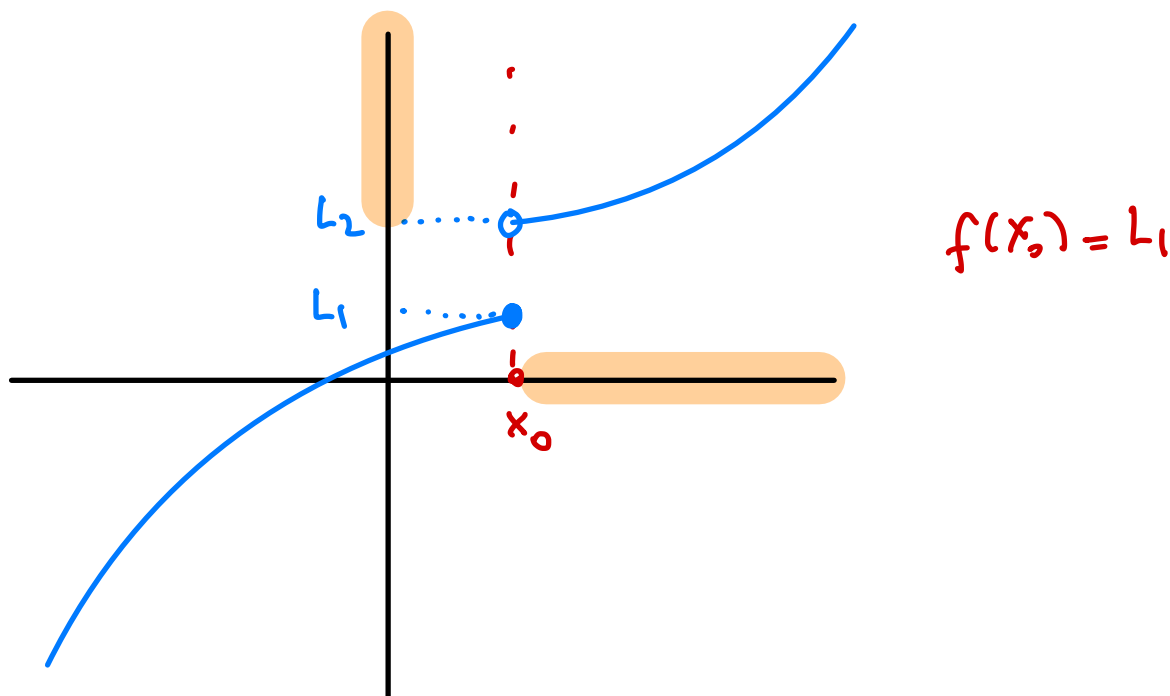
$$\forall x_1 \neq x_2$$



Teorema Sia $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente
e sia $x_0 \in]a, b[$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{a < x < x_0} f(x) = L_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x_0 < x < b} f(x) = L_2$$



-) Vale una analoga caratt. per f . decrescenti.
-) Valgono risultati analoghi se $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$ sostituendo intorni destri e sinistri opportunamente.

es. $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
crescente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup_{x > 0} f(x).$$

successioni

Una successione è una $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(n) = a_n$$

n -esimo termine della successione.

Si indica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione
oppure $(a_n)_n$ o anche solo (a_n)

esempio $a_n = \frac{1}{n}$ $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

Notiamo che $\mathbb{N}$ non ha più di acc. in $\mathbb{R}$.

Tuttavia ha $+\infty$ come pto acc. in $\overline{\mathbb{R}}$.

(infatti $\mathbb{N} \cap]M, +\infty[\neq \emptyset$ per ogni $M \in \mathbb{R}$)

Ha senso definire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

dove $L \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

nel modo seguente

•) $L \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 : \forall n > M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

•) $L = +\infty$ • $L = -\infty$
servendo per esercizi

Oss Qualora la successione a_n sia
espressa come $a_n = f(n)$, con $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(o $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $D \ni \mathbb{N}$)

ad es. $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

questa è $f(n)$ con $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
 $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Nel nostro caso $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y)}{y} = 1$.
 $y = \frac{1}{x}$

quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

Questo approccio è abbastanza generale
ma non funziona sempre:

① Potrei avere $a_n = \frac{n!}{n^n}$

In questo caso a_n non so scriverlo come $f(n)$ per $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = ? \quad \left(\begin{array}{l} \text{non} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^n = +\infty \end{array} \right)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leftarrow 0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

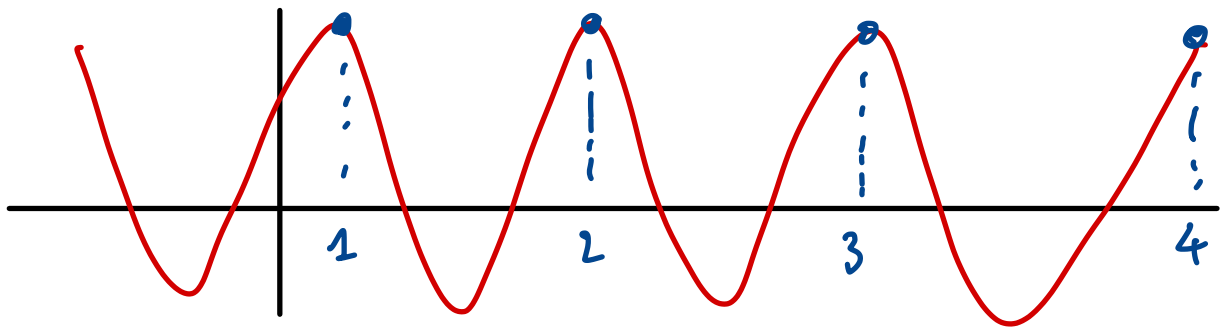
(Note: In the original image, the first '0' has an arrow pointing to it with 'n → +∞' below it. The last '0' has an arrow pointing to it with 'n → +∞' below it. The boxes around the terms in the fraction are colored: the first box is orange, the others are red. Above the boxes are red symbols: '≤' above the first box, '≤' above the second box, and '≤' above the last box.)

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ per il T. due carab.

② Può succedere che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
ma non esista $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
anche se $f(n) = a_n$.

es. $a_n = \sin(2\pi n) \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ma $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(2\pi x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sin(y)$
 $y = 2\pi x$



Teorema Data $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotona crescente

Allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \text{in } \overline{\mathbb{R}}$$

In particolare il limite è finito se e solo se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sup. limitata.

Dunque ogni succ. monotona crescente e sup. limitata è convergente.

valgono ris. analoghi per $(a_n)_n$ decrescente.

dim (caso a_n è sup. limitata)

$$\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{quindi } \exists \sup \{a_n | n \in \mathbb{N}\} =: \lambda$$

$$\text{Vogliamo vedere che } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda.$$

$$\text{Sappiamo (i) } a_n \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \lambda - \varepsilon < a_{n_0}$$

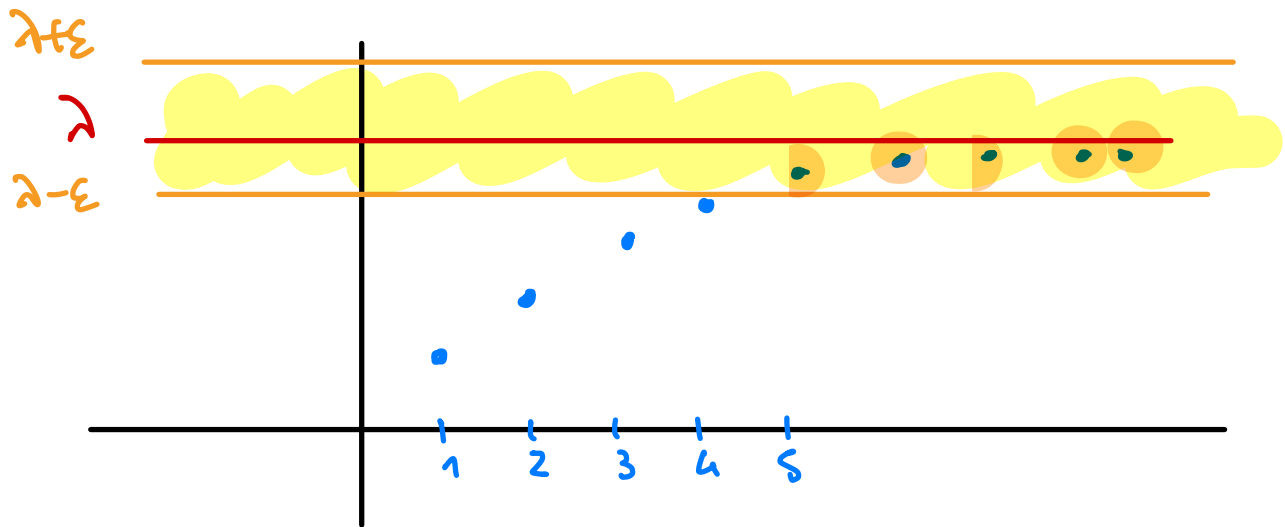
Essendo a_n monotona crescente

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \lambda - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \quad \forall n \geq n_0.$$

d'altra parte $a_n \leq \lambda < \lambda + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \lambda - \varepsilon < a_n < \lambda + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

che è proprio $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda.$



Teorema la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ data da

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
 è monotona crescente
 e sup. limitata (dunque convergente).

Lemma Dati $a \geq b \geq 0$ allora per $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1) b^n (a-b) \leq a^{n+1} - b^{n+1} \leq (n+1) a^n (a-b)$$

dim (del Teorema)

Applico il lemma per $a = 1 + \frac{1}{n}$ $b = 1 + \frac{1}{n+1}$

$$e \quad b^{n+1} \geq a^{n+1} - (n+1) a^n (a-b) \quad (*)$$

otengo

$$a-b = \cancel{1} + \frac{1}{n} - \cancel{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - (\cancel{n+1}) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n \cancel{(n+1)}} \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] \\ &\geq \alpha_n. \end{aligned}$$

così dimostra che $(\alpha_n)_n$ crescente.

Ora applico la (*) a $a = 1 + \frac{1}{2n}$ $b = 1$

$$1^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n+1} - (n+1) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \cdot \frac{1}{2n}$$

$$\geq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{n+1}{2n} \right]$$

$\leadsto$

$$\frac{2n + \cancel{1} - n - \cancel{1}}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$2^2 \geq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

così $\alpha_{2n} \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Essendo $(\alpha_n)_n$ crescente : $\alpha_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ne possiamo dedurre che

Bernoulli
 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{n} \cdot n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq \alpha_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(\alpha_n) \uparrow \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n =: e$$

Dunque $2 \leq e \leq 4$.

dim (del lemma ausiliario)

Si basa su questa osservazione

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \left(\underline{a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n} \right)$$

ora, essendo $a \geq b \geq 0$ avremo

$$b^n \leq a^{n-k} b^k \leq a^n \quad \forall k \geq 0.$$

$$(n+1) b^n \leq a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n \leq (n+1) a^n$$

ora basta moltiplicare per $(a-b)$ e ho finito.

Corollario Sapendo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

allora valgono

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(iii) \quad \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$$

il limite che
avevamo
avuto per vero.

Notiamo (i) + (ii) implica (iii). Infatti
se valgono (i) e (ii)

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} (1+y)^{\frac{1}{y}} \stackrel{y=1/x}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(i) Osservo che dato $x \in \mathbb{R}$ e $[x]$ parte intera
 $[x] \leq x \leq [x] + 1$.

$$\forall x > 0 \quad \underbrace{\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}}_{\downarrow e} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}}_{\downarrow e}$$

es. $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 \leq \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)^\pi \leq \left(1 + \frac{1}{3}\right)^4$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e \end{aligned}$$

↓ e
↓ 1

(ii) Dimostriamo $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-z} \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z}{z-1}\right)^z \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)^z \end{aligned}$$

$z-1 = y$

$z = y+1$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Teorema (del confronto asintotico / del rapporto)

Sia $(a_n)_n$ una successione positiva ($a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Se vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0$ (anche $+\infty$)

Allora

$$(i) \quad L > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

$$(ii) \quad 0 \leq L < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Oss 1. Per la successione $a_n = c^n$ per $c \geq 0$.

abbiamo $c > 1 \quad a_n \rightarrow +\infty$

$0 \leq c < 1 \quad a_n \rightarrow 0.$

$c = 1 \quad a_n = 1^n \rightarrow 1.$

Oss 2. Se nel teorema $L=1$ non posso concludere. Infatti

$$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$

$$a_n = n \rightarrow +\infty$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1.$$

dim (del teorema)

Vediamo il caso $L > 1$ (l'altro è analogo)

Per ipotesi $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon$$

$$\text{ovvero} \quad L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{|L-1|}{2}$$

Scego $\varepsilon_0 > 0$ in modo che $L - \varepsilon_0 > 1$

Ne segue per $\varepsilon_0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}:$

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon_0 =: c > 1.$$

$$\text{ovvero} \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+1} > c^1 a_n$$

$$\text{per induzione} \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n > c^{n-n_0} a_{n_0}$$

$$\text{Siccome} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{c^{n-n_0}}_{+\infty} \cdot \underbrace{a_{n_0}}_{>0} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

Esempio (fondamentale!)

Dato $\alpha > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e per $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^n}{n^k} = +\infty$$

|| l'esponentiale tende a $+\infty$ più rap. delle potenze / polinomi

Chiamo $a_n = \frac{\alpha^n}{n^k}$ succ. positiva e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{\alpha^n} = \alpha \frac{n^k}{(n+1)^k}.$$

$$\begin{aligned} \text{ma } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot \frac{n^k}{(n+1)^k} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \frac{n^k}{n^k \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k} \\ &= \underline{\underline{\alpha > 1}}. \end{aligned}$$

Argomentando in maniera simile a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Corollario $\forall \alpha > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x}{x^k} = +\infty.$$

In particolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \quad (e > 1)$

Si può poi provare che per ogni polinomio $P(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0$ dove $d = \text{grado } P$ vale (se $a_d > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{P(x)} = +\infty.$$

$$\frac{e^x}{P(x)} = \frac{e^x}{x^d \left(a_d + \frac{a_{d-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{d-1}} + \frac{a_0}{x^d} \right)}$$

$\rightarrow a_d \text{ per } x \rightarrow +\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{a_d x^d} = \begin{cases} +\infty & a_d > 0 \\ -\infty & a_d < 0 \end{cases}$$

oss Il teorema del confronto asintotico vale per successioni positive

Se (a_n) è una successione posso applicare il teorema a $(|a_n|)_n$.

$$\text{se } |a_n| \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

$$|a_n| \rightarrow +\infty \Rightarrow ?$$

In fatti se $|a_n| \rightarrow +\infty$ posso avere più

casi :

$$a_n \rightarrow +\infty$$

$$(a_n = 2^n)$$

$$a_n \rightarrow -\infty$$

$$(a_n = -2^n)$$

$$a_n \text{ non ha limite, } a_n = (-1)^n 2^n.$$

Esempio Abbiamo detto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

$$\left(\text{notando che } 0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \right).$$

Si può trovare anche col crit. rapporto

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$\text{ma } (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cancel{(n+1)} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1} \cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} < 1.$$

Teorema (criterio della radice)

Sia $(a_n)_n$ una successione positiva
Se vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \Rightarrow \begin{cases} L > 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \\ L < 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases}$$

($L \geq 0$
può essere anche $+\infty$)

CONFRONTO DEGLI INFINITI

Abbiamo visto che $\forall \alpha > 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x}{x^k} = +\infty$$

Possiamo vedere che $\forall \beta > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x}{x^\beta} = +\infty$$

(es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{1/3}} = +\infty$)

infatti $\frac{\alpha^x}{x^\beta} \geq \frac{\alpha^x}{x^{[\beta]+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

↑
siccome $x \rightarrow +\infty$ posso prendere $x > 1$

Per comodità fissiamo $\alpha = e$

e partendo da $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\beta} = +\infty$

facciamo c.d.v. $e^x = y$ ovvero $x = \log y$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\beta} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\log^\beta y} = +\infty.$$

Chiaramente da ciò segue che $\forall \alpha > 1$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^\alpha}{\log^\beta y} = +\infty \quad (**)$$

con un cambio di variabile si può vedere che **(**)** vale per ogni $\alpha > 0$ (non solo $\alpha > 1$)

Ponendo in **(**)** $z = \frac{1}{y}$ ottengo ($y = z^{-1}$)

$$+\infty = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{z^{-\alpha}}{\log^\beta(\frac{1}{z})} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{z^\alpha \log^\beta(\frac{1}{z})}$$

$$\text{essendo } \log\left(\frac{1}{z}\right) = \log(z^{-1}) = -\log z$$

ne deduco

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} z^\alpha \log^\beta(z) = 0$$

esempio $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log x^x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log x} = 1$

in quanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$.

esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x + 2^x}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{3^x} = +\infty$

$$\frac{x^x + 2^x}{2^x + 3^x} = \frac{x^x}{3^x} \left[\frac{\left(1 + \frac{2^x}{x^x}\right)}{\left(\frac{2^x}{3^x} + 1\right)} \right] \rightarrow 1.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ perché $\frac{2}{3} < 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \log 2}}{e^{x \log x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log 2 - x \log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(\log 2 - \log x)} = 0 \end{aligned}$$

SUCCESSIONE PER RICORRENZA

Sono successioni (a_n) definite

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad f \text{ è una certa funzione.}$$

Ad esempio $f(x) = \sqrt{2+x}$

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$$

Per $\alpha = \sqrt{2}$ è la successione di prima

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} & a_2 &= \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ a_3 &= \sqrt{2+a_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Domanda: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$

Assumiamo che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$.

allora anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$

$$\text{quindi } a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Rightarrow L = \sqrt{2+L}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+L}.$$

$$L = \sqrt{2+L} \Rightarrow L = -1 \quad \text{o} \quad L = 2$$

ma essendo $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora necessariamente $L \geq 0 \Rightarrow L = 2$

Vediamo che $a_1 = \sqrt{2}$ $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$
soddisfa:

① $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. per induzione

$a_1 = \sqrt{2} \geq 0$ e se $a_n \geq 0$
allora $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \geq \sqrt{2} \geq 0$

($x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2+x} \geq 0$).

② $a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Per induzione

$a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ se $a_n \leq 2$
allora $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$

③ a_n è monotona crescente.

vorrei vedere $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n$.

In fatti ciò è vero se $\sqrt{2+a_n} \geq a_n$. (*)

(Per quali $x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{2+x} \geq x$?)

$$(*) \Rightarrow a_m \geq 0$$

$$2 + a_m \geq a_m^2$$

$$a_m^2 - a_m - 2 \leq 0.$$

Da'altra parte $x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2].$

essendo $0 \leq a_m \leq 2 \Rightarrow a_m^2 - a_m - 2 \leq 0.$