

Teorema (operazioni sui limiti)

Siano $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

x_0 pt di acc per $D_f \cap D_g$ (sia per D_f che D_g)

Se valgono $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$

$L \in \mathbb{R}$
 $M \in \mathbb{R}$

Allora

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = L + M$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = LM$$

$$(iii) \underline{M \neq 0} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

Oss. Scrivere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

è condizionato all'esistenza dei limiti
a destra dell'uguale!

Ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} x}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{non esiste.}}$$

Esempio Torniamo a questo limite

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Posso usare il teorema per dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste finito.

Infatti se, per assurdo, esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} x + \cos\left(\frac{1}{x}\right) = L \in \mathbb{R}.$$

ora
$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)}_L + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} (-x)}_0$$

dim (i) Per ipotesi vale

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad 0 < |x - x_0| < \delta &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (*) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' > 0: \quad 0 < |x - x_0| < \delta' &\Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon \quad (**)\end{aligned}$$

Voglio vedere che $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + M$.

" devo studiare $|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon$ "

Fisso $\varepsilon > 0$, sia $\delta'' := \min \{\delta, \delta'\}$

per $0 < |x - x_0| < \delta''$ valgono (*) che (**)

Dunque

$$\begin{aligned}|(f(x) + g(x)) - (L + M)| \\ &= |f(x) - L + g(x) - M| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

(ii) Voglio dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = LM$.

Fisso $\delta'' = \min \{\delta, \delta'\}$ e $0 < |x - x_0| < \delta''$

allora valgono (*) e (**).

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |(f(x) - L) \cdot g(x) + L(g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| \cdot |g(x)| + |L| \cdot |g(x) - M| \\ &< \varepsilon (|g(x)| + |L|).\end{aligned}$$

Per concludere devo dire che $|g(x)|$ è limitato in un intorno di x_0 .

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - M + M| \\ &\leq |g(x) - M| + |M| \\ &\leq \varepsilon + |M| \leq 1 + |M| \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{per } \varepsilon \text{ piccolo} \\ \varepsilon < 1 \end{array} \right).$$

Nel mio intorno $|g(x)| \leq 1 + |M|$

diunque

$$|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon (1 + |M| + |L|).$$

che conclude la dimostrazione.

(iii) Ci basta dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M, \quad M \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}.$$

Fisso $\varepsilon > 0$, prendo $0 < |x - x_0| < \delta'$ e ho la validità di ~~(*)~~. Si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| &= \left| \frac{M - g(x)}{g(x) \cdot M} \right| = \frac{|g(x) - M|}{|g(x)| \cdot |M|} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|g(x)| \cdot |M|} \leq \frac{\varepsilon}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \end{aligned}$$

Teo perm. segno $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \neq 0$ allora
 $|g(x)| > \frac{|M|}{2}$ in un intorno.

Alcune conseguenze

Osservando che $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

usando il teorema operazioni sui limiti.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} ax^n = ax_0^n$$

Ne possiamo dedurre che per P, Q polinomi tali che $Q(x_0) \neq 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 2} = \frac{4}{3}$$

Non vale in generale se $Q(x_0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}(x^3 + x^2 + x + 1)} = \frac{3}{4}$$

esempio usando la validità del limite
seguente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad \text{per } x_0 > 0.$$

vorrei calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1+x} - \cancel{1}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Teorema (del confronto o dei due carabinieri)

Siano $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 pto acc per D

se $\exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

e se $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L.$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad x \in I(x_0, \delta)$$

$$\begin{array}{ccc} x \rightarrow x_0 \downarrow & \downarrow x \rightarrow x_0 & \downarrow x \rightarrow x_0 \\ L & L & L \end{array}$$

Oss Se ma sa che

$$\exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \underline{f(x) \leq h(x) \leq g(x)}.$$

$$\begin{array}{l} \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (L \leq L') \quad \Rightarrow \quad \text{se } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = M \\ \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L' \quad \text{allora} \quad L \leq M \leq L'. \end{array}$$

dim (tes del confronto)

IP. $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ (**)

inoltre $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 : 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ (*)
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta' > 0 : 0 < |x - x_0| < \eta' \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$ (***)

Donque se prend $0 < |x - x_0| < \bar{\eta}$, $\bar{\eta} = \min\{\eta, \eta', \delta\}$

Allora vale che

$$L - \varepsilon \stackrel{(*)}{\leq} f(x) \stackrel{(**)}{\leq} h(x) \stackrel{(***)}{\leq} g(x) \stackrel{(***)}{\leq} L + \varepsilon$$

}

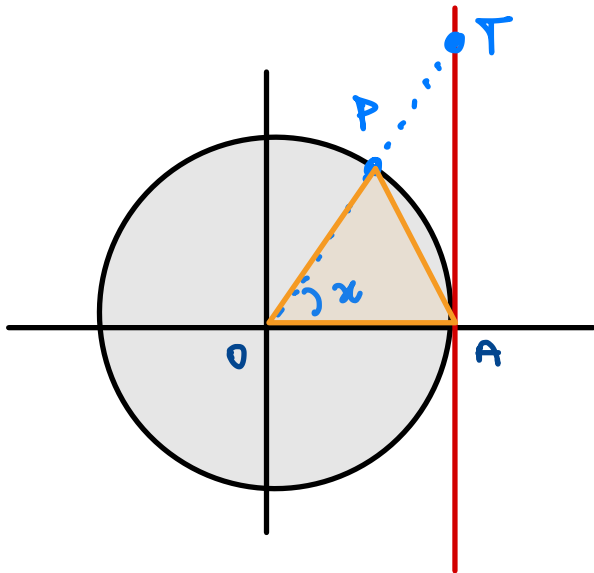
donque $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$.

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Possiamo mostrare che per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ vale

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$



$$\text{area}(\triangle AOP) \leq \text{area}(\widehat{AOP}) \leq \text{area}(\triangle AOT)$$

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$$

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x}$$

con le dovute attenzioni al segno

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$$

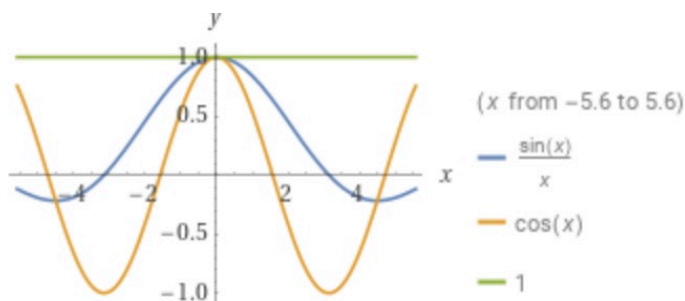
$$x \rightarrow 0 \downarrow$$

$$1$$

$$x \rightarrow 0 \downarrow$$

$$1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Osservazioni ① Scrivere che

$$\forall x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

implica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$

è condizionato all'esistenza dei limiti.

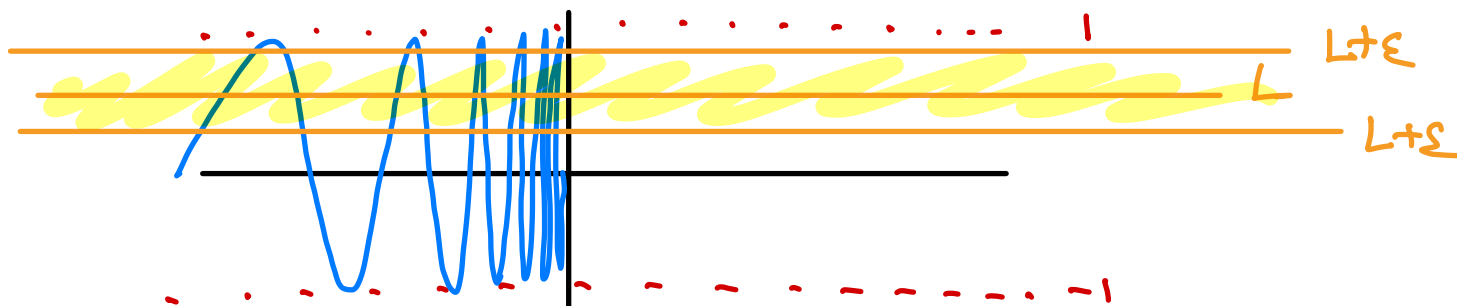
Il teorema sopra quindi dati

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ esistono e coincidono

garantisce l'esistenza di $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

esempio $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

so che $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste.



Nonostante ciò $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Infatti per ogni $x \neq 0$ si ha

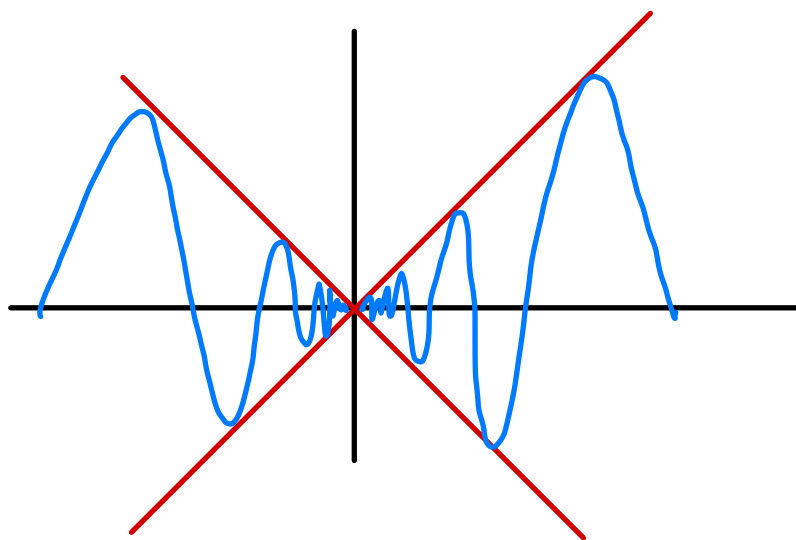
$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\text{per } x > 0 \quad -x \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

ma d'altra parte vale anche per $x < 0$.

$$\text{per } x \neq 0 \quad -x \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$x \rightarrow 0 \quad \downarrow \quad 0 \qquad \downarrow \quad x \rightarrow 0, \quad 0 \qquad \downarrow \quad x \rightarrow 0 \quad 0$



NOTAZIONE o-piccolo (di Landau)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = o(g(x))$$

$x \rightarrow x_0$

$$f = o(g)$$

$x \rightarrow x_0$

" f tende a zero più rapidamente di g " intorno ad x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\Rightarrow) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x} \right) = 0.$$

dunque $\sin x - x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

$$\sin x = x + o(x)$$

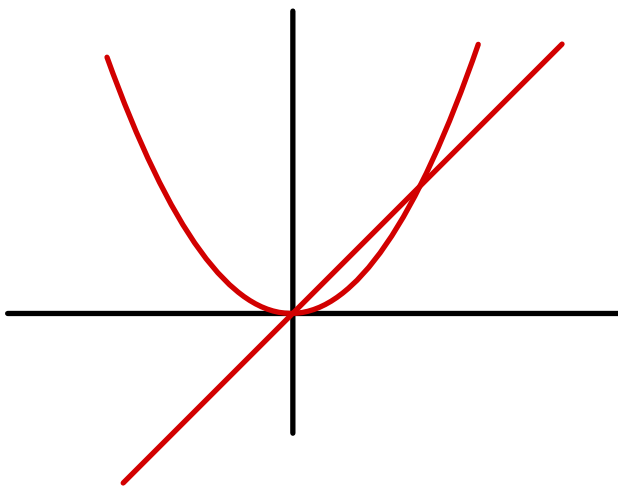
Osserviamo ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 = o(x) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

$$x^2 \in o(x)$$

In generale $n > m \quad x^n = o(x^m) \text{ per } x \rightarrow 0.$



$$x^2 = o(x)$$

$$x^3 = o(x)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = x^3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x - 1 = o(1)$$

osservo $\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{f(x)}_1 = 0 \Rightarrow f(x) = o(1)$
 $x \rightarrow x_0.$

$$\Rightarrow \cos x = 1 + o(1).$$

Vediamo ora che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\downarrow 1/2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \frac{1}{2} x^2}{x^2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos x - \frac{1}{2} x^2 = o(x^2)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

lo confronto con

$$\cos x = 1 + o(1)$$

Qss Sia $h(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

allora $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^2} = 0$. Ma ciò implica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{h(x)}{x^2} \right) = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow -h(x) = o(x^2) \\ \rightarrow h(x) = -o(x^2) \end{array}$$

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \sin(x^2)}{x^2 + x^3}$

Al denominatore ho $x^2 + x^3 = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$
in quanto $x^3 = o(x^2)$.

mi ricordo che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

D'altra parte

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Quindi (?)

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1.$$
$$y=x^2 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

$$\frac{1 - \cos x - \sin x^2}{x^2 + x^3} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - (x^2 + o(x^2))}{x^2 + o(x^2)}$$

$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

ricorda

$$-o(x^2) = o(x^2).$$

vale

$$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2).$$

in fatti

$$f(x) = o(x^2)$$

$$g(x) = o(x^2)$$

↓

$$f(x) + g(x) = o(x^2).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x^2} = 0$$

$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}.$$

Quindi il limite originale

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \right) \frac{1}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}$$

$\uparrow x \rightarrow 0$
 0

$\downarrow x \rightarrow 0$
 0

$$= -\frac{1}{2}.$$

Proposizione Siano $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 acc. D .

Se vale $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + o(f(x))}{g(x) + o(g(x))} = L$

Significa la cosa seguente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + o(f(x))}{g(x) + o(g(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

dim $f(x) + o(f(x)) = f(x) + h(x)$ con $\frac{h(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

$g(x) + o(g(x)) = g(x) + k(x)$ con $\frac{k(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + h(x)}{g(x) + k(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 + \frac{h(x)}{f(x)}}{1 + \frac{k(x)}{g(x)}}$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 + \frac{h(x)}{f(x)}}{1 + \frac{k(x)}{g(x)}} = 1.$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Oss Possiamo pensare a questo come una "generalizzazione" del calcolo dei limiti seguenti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^6 - x^5 + x^{10}}{x^9 + 2x^7 + 2x^5} &= \frac{-x^5 + o(x^5)}{2x^5 + o(x^5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^5} (2x - 1 + x^5)}{\cancel{x^5} (x^4 + 2x^2 + 2)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

osservazione Per $x \rightarrow 0$ vale che

(i) $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

⊗ $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

$o(x^m)^n = o(x^{mn})$

(iv) $o(x^m) + o(x^n) = o(x^\alpha)$ $\alpha = \min\{m, n\}$.

Per $c \neq 0$ $c \cdot o(x^n) = o(cx^n) = o(x^n)$

dim (i) se $f(x) = o(x^m)$ $g(x) = o(x^n)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^{m+n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^m} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0 \cdot 0 = 0.$

analogamente vedere la (ii) e la (iii)

$$(iv) \quad f(x) = o(x^n) \quad g(x) = o(x^m)$$

ipotizzando $n > m$ voglio vedere

$$\begin{aligned} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x^m} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^m} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^m}}_{=0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^m} \cdot x^{n-m} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$n-m > 0$.

(v) se $f(x) = o(x^n)$ allora per $c \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{cx^n} = \frac{1}{c} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \frac{1}{c} \cdot 0 = 0$$

quindi $f(x) = o(cx^n)$.

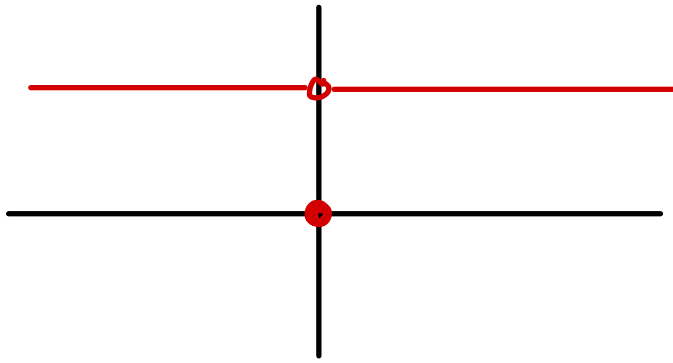
Analogo le altre identità.

limite della funzione composta

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L.$$

Esempio Sia $g(y) = \begin{cases} 1 & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$



$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1.$$

ora considero la funzione $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ovviamente $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

ora se io calcolo

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} g(0) = 0.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1.$$

Teorema Sia $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
tale che $f(D_f) \subseteq D_g$

Sia x_0 pto acc. per D_f , y_0 di acc per D_g .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L$$

se vale almeno una di queste due

(i) $f(x) \neq y_0$ in intorno di x_0 .

(ii) $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$ (cioè $L = g(y_0)$).

ad esempio posso usare questo per dire
se $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

quindi $\sin f(x) = f(x) + o(f(x))$.

ad es. $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$.

$$\sin(2x^3) = 2x^3 + o(x^3)$$

Esempi

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{\sin^2(2x)} = (*)$$

noto che sono in una situazione tipo $\frac{0}{0}$.

Sia $y = x - \pi$ se $x \rightarrow \pi$ allora $y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y + \pi) + 1}{\sin^2(2(y + \pi))} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\cos(y) + 1}{\sin^2(2y + 2\pi)} = \sin^2(2y). \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\cos(y) + 1}{\sin^2(2y)} = \frac{\frac{y^2}{2} + o(y^2)}{4y^2 + o(y^2)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

ora $1 - \cos(y) = \frac{y^2}{2} + o(y^2)$

$$\begin{aligned} \sin(2y) &= 2y + o(2y) \\ &= 2y + o(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(2y) &= (2y + o(y))^2 \\ &= 4y^2 + \underbrace{4y \cdot o(y)}_{o(y^2)} + \underbrace{o(y)^2}_{o(y^2)} \\ &= 4y^2 + o(y^2). \end{aligned}$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

so che $\sin(x) = x + o(x)$

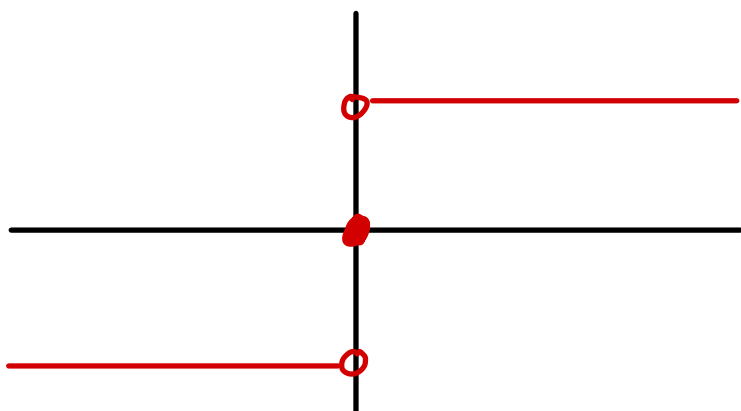
ma anche $\tan(x) = x + o(x)$. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + o(x) - (\cancel{x} + o(x))}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3} \quad \text{non posso concludere.}$$

$$\text{segno}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ non esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

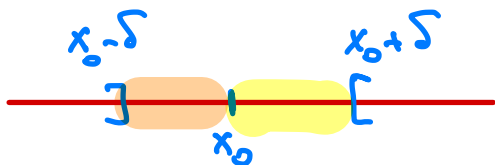
LIMITI DESTRO E SINISTRO

Diamo le seguenti definizioni:

data $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 di acc. per D_f .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \boxed{x_0 < x < x_0 + \delta} \quad 0 < x - x_0 < \delta \quad x \in D_f \\ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \boxed{x_0 - \delta < x < x_0} \quad 0 < x_0 - x < \delta, \quad x \in D_f \\ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Prop Data $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 di acc. per D_f .

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \end{cases}$$

dim segue direttamente dalla definizione.

Per ora ammettiamo

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} =: e \quad \text{numero di Eulero.}$$

e lo dimostreremo in seguito.

Da questo potremo dedurre, indicando $\log(x)$ e $\log_e(x)$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$