

Caso particolare : $W=1$

In questo caso $W=1=1e^{i0}$. $R=1$
 $\varphi=0$.

Le soluzioni di $z^n=1$ sono date da

$$z_k = e^{i \frac{2\pi}{n} k} \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

radici n -esime unità.

esempio: Trovare le radici terze dell'unità
e disegnarle nel piano complesso.

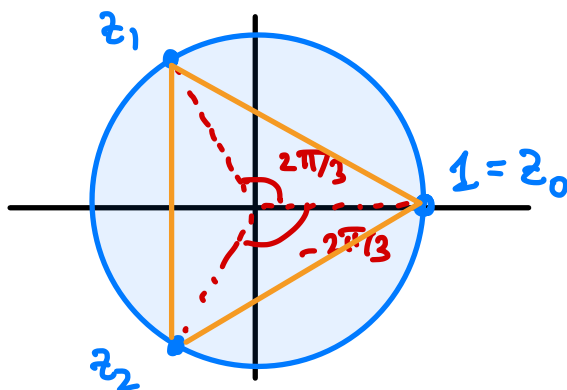
devo risolvere $z^3=1$. le soluzioni:

$$z_k = e^{i \frac{2\pi}{3} k} \quad k=0, 1, 2.$$

$$z_0 = e^{i0} = 1$$

$$z_1 = e^{i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_2 = e^{i \frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{-i \frac{2\pi}{3}} = \overline{e^{i \frac{2\pi}{3}}}$$



Se risolviamo invece $z^3 = 8i$

$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$R = 8 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

quindi $z = re^{i\theta}$

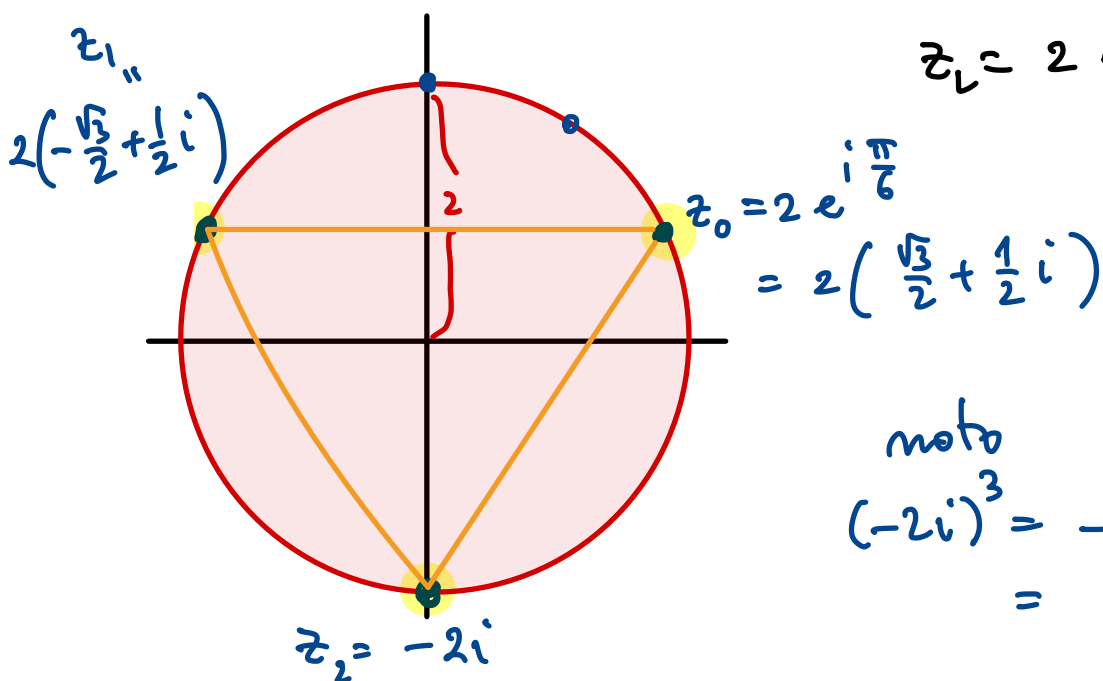
$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + \underline{\underline{2k\pi}} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad k=0$$

$$z_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} \quad k=1$$

$$z_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} \quad k=2.$$



nota

$$\begin{aligned} (-2i)^3 &= -8i^3 \\ &= 8i \end{aligned}$$

Enunciamo un teorema che non dim

Teorema (fondamentale dell'algebra)

Ogni equazione della forma

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$.
ammette almeno una soluzione in $\mathbb{C}$.

OSS In effetti ciò implica che le
soluzioni di $P(z) = 0$ sono esattamente
 n , quando contate con la loro moltep.

Infatti se $\alpha \in \mathbb{C}$ risolve $P(z) = 0$ (cioè $P(\alpha) = 0$)
allora $P(z) = Q(z)(z - \alpha)$ con
 $Q(z)$ opportuno polinomio di grado $n-1$.

OSS Se voglio risolvere in $\mathbb{C}$ una equazione

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$,

allora le soluzioni sono o reali oppure
a due a due complesse coniugate.

In effetti se $\alpha \in \mathbb{C}$ verifica

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

allora

$$\overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{0}$$

$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

cioè

$$\overline{a_n} \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}} \overline{\alpha}^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0$$

$\overline{\alpha \beta} = \overline{\alpha} \overline{\beta}$

$$\overline{a_n} \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}} \overline{\alpha}^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0$$

$a_j \in \mathbb{R}$
 $a_j = \overline{a_j}$

$$a_n \overline{\alpha}^n + a_{n-1} \overline{\alpha}^{n-1} + \dots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = 0$$

ovvero $\overline{\alpha}$ è soluzione dell'equazione.

4

Funzioni

Dati due insiemi A, B una funzione da A a B è un oggetto

$$f: A \rightarrow B \quad A \text{ dominio, } B \text{ codominio.}$$

tale che f associa ad ogni elemento di A uno e uno solo elemento di B .

In questo caso scriviamo $f(a) = b$
per dire che f associa $a \in A$ con $b \in B$.

Per formalmente dati A, B definiamo.

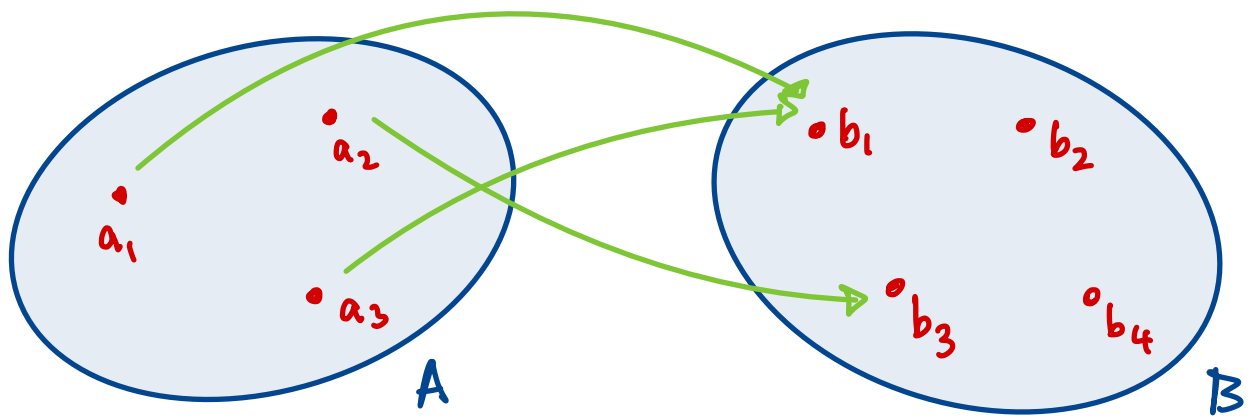
$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \} \quad \text{prodotto cartesiano.}$$

Una funzione $f: A \rightarrow B$ è un sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ che soddisfa:

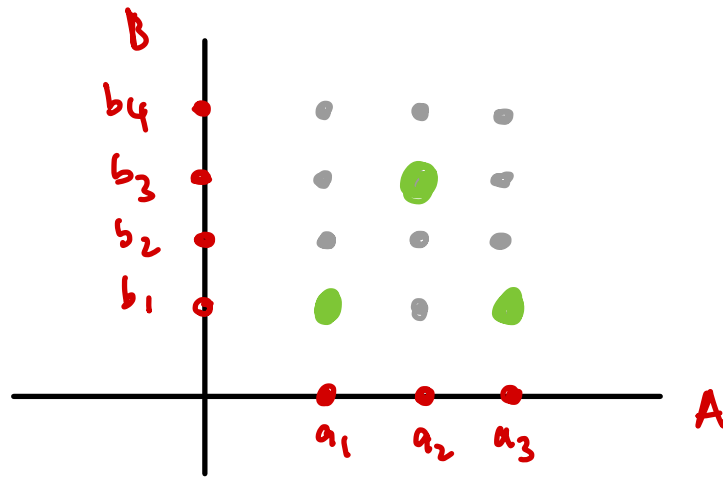
$$\forall a \in A \quad \exists ! b \in B : (a, b) \in G$$

↪ scrive $f(a) = b$.

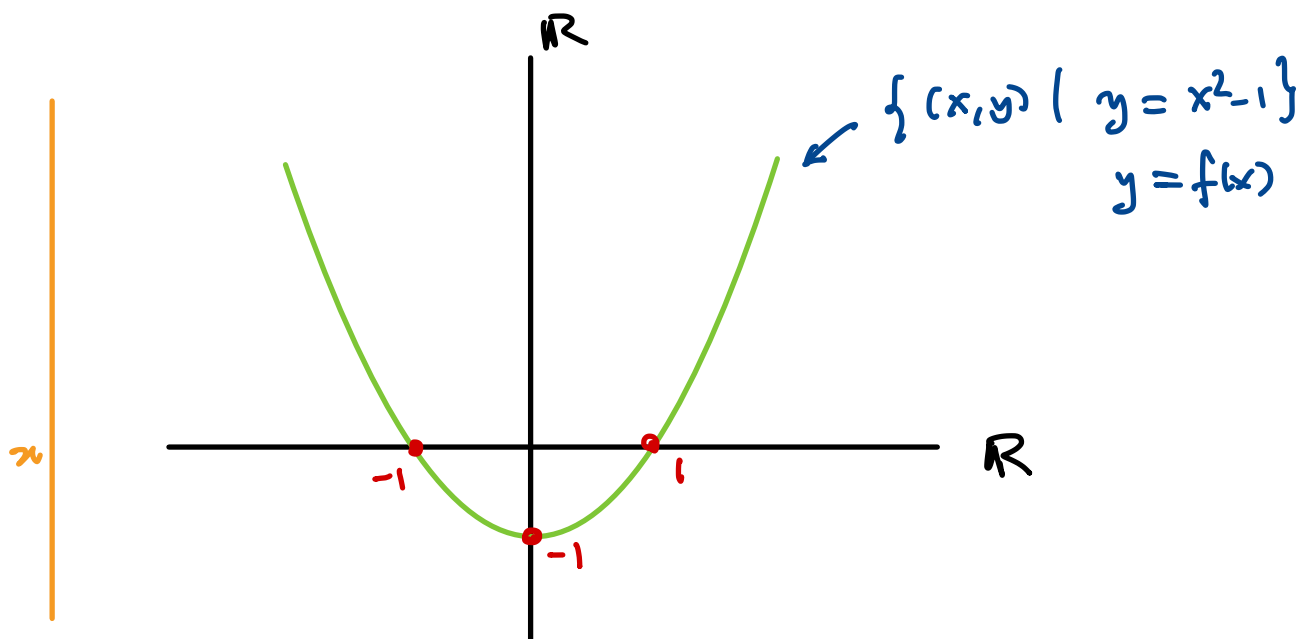
Tale G è detto grafico di f



$$f(a_1) = b_1, \quad f(a_3) = b_1, \quad f(a_2) = b_3.$$



Se nowa prende $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - 1$



$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists ! y \in \mathbb{R} : f(x) = y.$$

Ci interessiamo a:

(i) funzioni ^{a valori} reali di variabile reale

$$f: \underline{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$$

(ii) successioni

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) = a_n$$

Def Data $f: A \rightarrow B$ diciamo che

(i) f è iniettiva se

$$\forall x_1, x_2 \in A ; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

oppure

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

(ii) f è suriettiva

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A : f(x) = y$$

(iii) f è biunivoca o biiettiva

se f è iniettiva e suriettiva.

osservazione: se penso in termini di
"equazione"

$$f(x) = y$$

(x incognita)

(y fissato e noto)

suriettività $(\Leftrightarrow) \forall y \in B \exists x \in A : y = f(x)$
esistenza della sol.

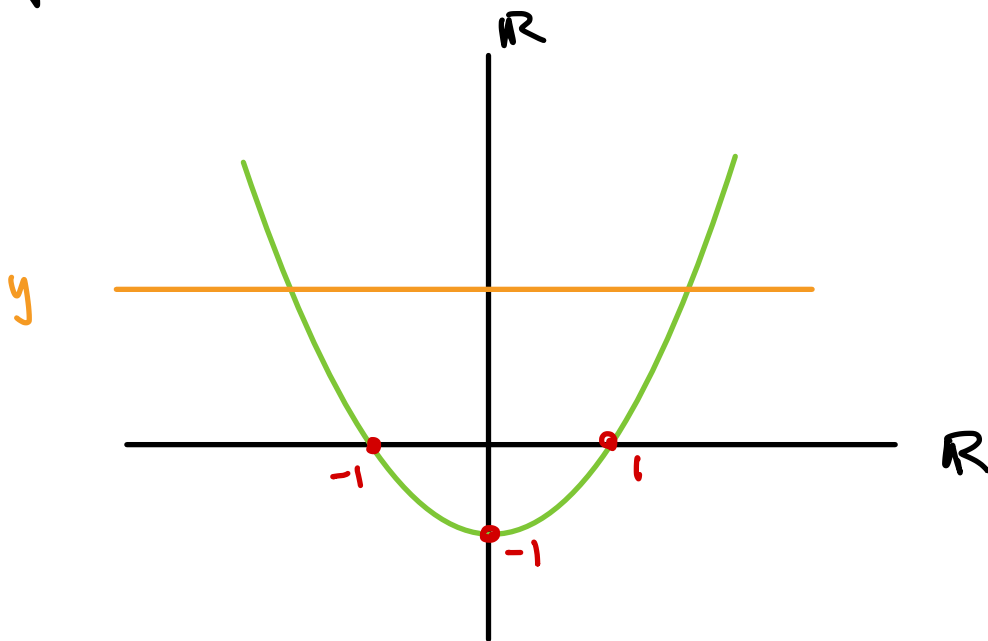
iniettività $(\Leftrightarrow) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
unicità della soluzione

biunivoca $(\Leftrightarrow) \forall y \in B \exists! x \in A : y = f(x)$
esistenza e unicà.

Es

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 - 1$$



$$f(x) = y$$

$$x^2 - 1 = y$$

$$x^2 = y + 1$$

$$x = \pm \sqrt{y + 1}$$

$y + 1 < 0$ no sol.

$y + 1 > 0$ due sol.

Se $f: A \rightarrow B$ è biiunivoca allora possiamo definire una funzione

$$f^{-1}: B \rightarrow A \quad (\text{funzione inversa di } f)$$

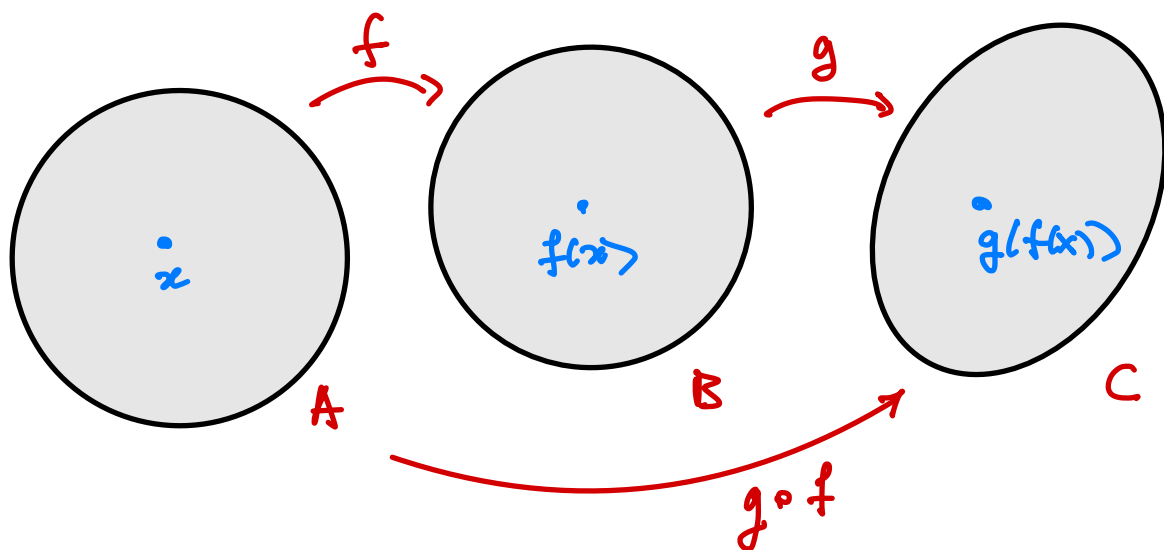
definita con: $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$

noto infatti che la def di f^{-1} è ben posta in quanto:

- (i) f suriettiva $\Rightarrow f^{-1}$ è def su tutto B .
- (ii) f iniettiva $\Rightarrow f^{-1}$ associa un solo elem.

def Date due funzioni $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ posso definire $g \circ f: A \rightarrow C$

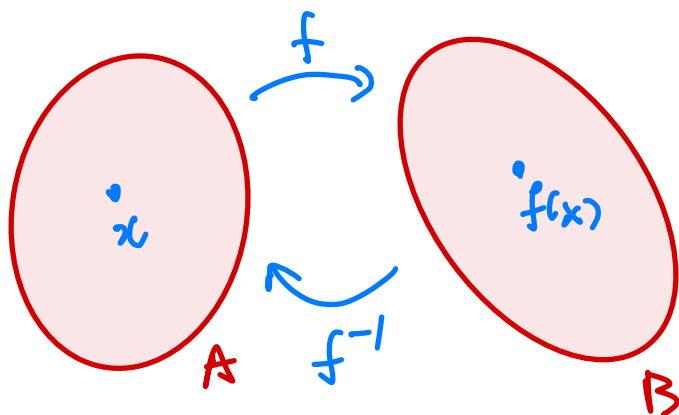
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Notiamo che se $f: A \rightarrow B$ è bivirosa
allora esiste $f^{-1}: B \rightarrow A$ e vale

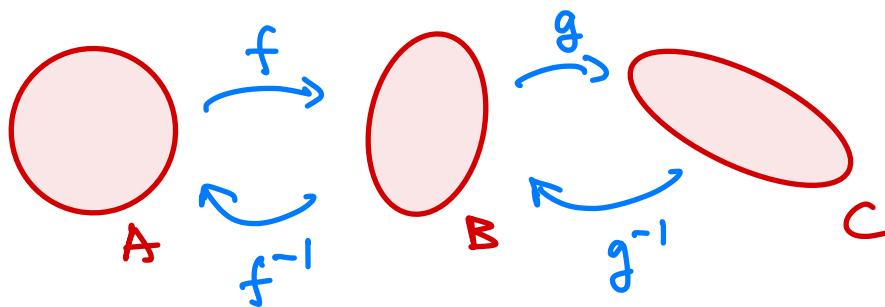
$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= y \quad \forall y \in B \\ f^{-1}(f(x)) &= x \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= \text{id}_B \\ f^{-1} \circ f &= \text{id}_A \end{aligned}$$



Notiamo anche che se $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$
sono bivirose allora $g \circ f: A \rightarrow C$
è bivirosa e vale

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$



def Dico che i due insiemi A e B sono
in corrispondenza biunivoca se $\exists$ una biiezione
 $f: A \rightarrow B$. In questo caso scriverò $A \cong B$

Osserveremo che valgono le proprietà:

- (i) $A \cong A$ (scego $f = id_A$) (riflessiva)
- (ii) $A \cong B \Rightarrow B \cong A$ (se ho $f \mapsto f^{-1}$) (simmetria)
- (iii) $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$ (transitività)
- (data $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$
ho $g \circ f: A \rightarrow C$)

INSIEMI FINITI E INFINITI

Def Un insieme A è infinito se
 A può essere messo in corr. biunivoca
 con un suo sottoinsieme proprio.

A infinito $\stackrel{\text{def}}{(\Leftrightarrow)} \exists B \subseteq A, B \neq A$ e $f: A \rightarrow B$ biunivoca

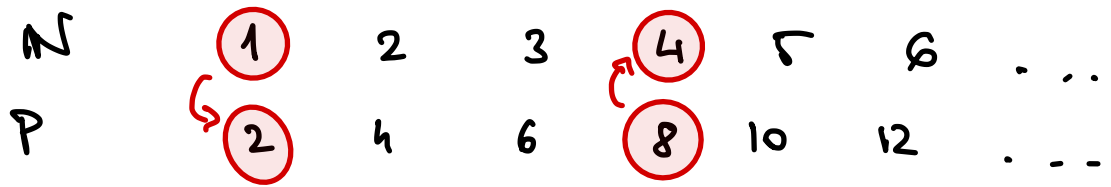
Principio dei cassetti Una funzione
 $f: \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{\text{calzini}} \rightarrow \underbrace{\{1, \dots, m\}}_{\text{cassetti}} \quad n > m$
 non è iniettiva.

Se A è finito allora $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che
 A corr. biunivoca con $\{1, \dots, N\}$
 Allora dico $\text{card}(A) = N$.

Prop $\mathbb{N}$ è infinito

dim È possibile vedere che
dato $P = \{2m \mid m \in \mathbb{N}\}$ numeri pari

la funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow P$ $f(m) = 2m$
è biiettiva.

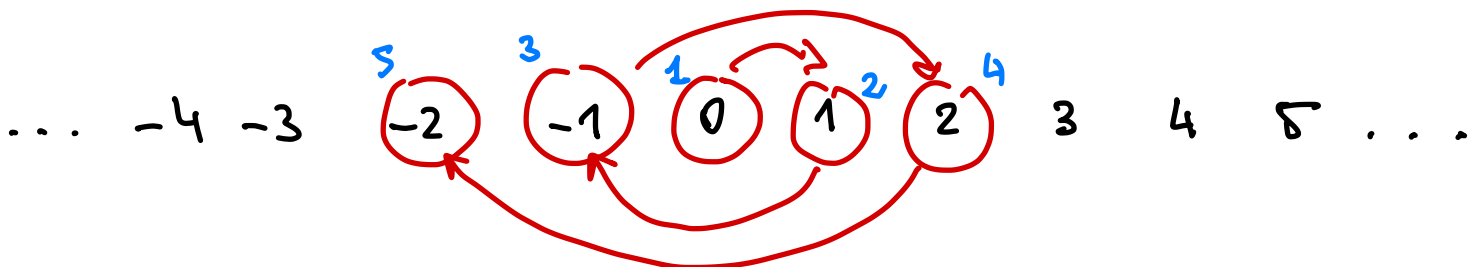


def Se $\exists f: A \rightarrow \mathbb{N}$ biiettiva allora
 A si dice (INFINITO) NUMERABILE

Teorema $\mathbb{Q}$ è numerabile
 $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Proposizione $\mathbb{Z}$ è numerabile

dim devo costruire una $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ biiettiva



$g(1) = 0$, $g(2) = 1$, $g(3) = -1$, $g(4) = 2$, ...
 $g(5) = -2$, ...

Provate a scrivere esplicitamente la g
 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ e vedere che è biiettiva.

OSS

Con lo stesso procedimento forse vedere
 che se A_1, A_2 sono numerabili allora
 $A_1 \cup A_2$ è numerabile

Anche $\mathbb{Q}$ è numerabile: infatti
 basta vedere che $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$
 è numerabile. In quanto

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-.$$

Ora $A = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \right\}$ è numerabile.
 noto che $A \supseteq \mathbb{Q}^+$

Possiamo identificare $A \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

	1	2	3	4	5	
1	1/1 ^①	1/2 ^②	1/3 ^⑥	1/4	1/5	...
2	2/1 ^③	2/2 ^⑤	2/3	2/4	2/5	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
4	4/1 ^④	4/2	4/3	4/4	4/5	...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

FORMA
ESPLICITA?

$\mathbb{R}$ non è numerabile (Cantor)

È sufficiente dimostrare che $[0,1[$ non è numerabile (seppur infinito)

Supponiamo per assurdo che $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow [0,1[$ che sia biunivoca.

Denoto $a_n = f(n)$; $[0,1[= \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a_1 0, $\alpha_1^{(1)}$ $\alpha_2^{(1)}$ $\alpha_3^{(1)}$ $\alpha_4^{(1)}$ $\alpha_5^{(1)}$...

a_2 0, $\alpha_1^{(2)}$ $\alpha_2^{(2)}$ $\alpha_3^{(2)}$ $\alpha_4^{(2)}$ $\alpha_5^{(2)}$...

a_3 0, $\alpha_1^{(3)}$ $\alpha_2^{(3)}$ $\alpha_3^{(3)}$ $\alpha_4^{(3)}$ $\alpha_5^{(3)}$...

$\vdots$

a_k 0, $\alpha_1^{(k)}$ $\alpha_2^{(k)}$ $\alpha_3^{(k)}$ $\alpha_4^{(k)}$ $\alpha_5^{(k)}$...

$\vdots$

$\vdots$

b 0, b_1 b_2 b_3 ...

Fisso $b_k = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha_k^{(k)} = 1 \\ 1, & \text{se } \alpha_k^{(k)} > 1 \end{cases} \Rightarrow b \neq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$\alpha_j^{(k)} \in \{0,1,\dots,9\}$

j-esima cifra di a_k

FUNZIONI ELEMENTARI

1. Funzioni potenza

" Dare significato $2^{\sqrt{2}}$, $\pi^{\sqrt{2}}$

Dato $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}}$$

Dato $q \in \mathbb{Q}^+$, $q = \frac{m}{n}$ $m, n \in \mathbb{N}$.

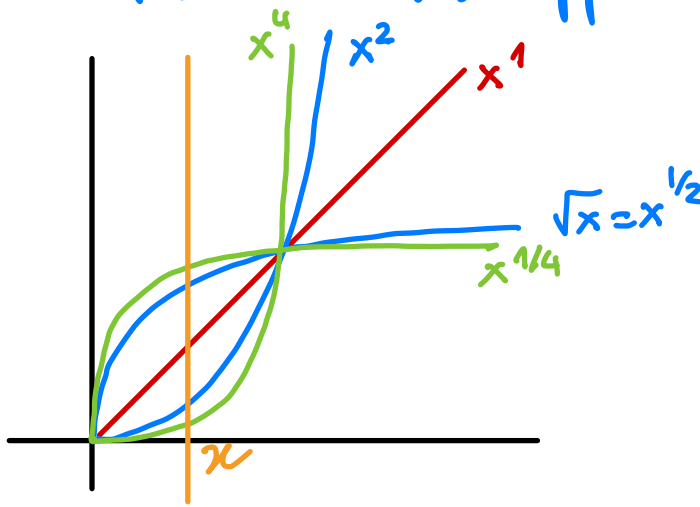
$$x^q = x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m}$$

per definizione
lo def
quando $x \geq 0$

Nota: Per $x \geq 1$ fissato

$$q_1 \leq q_2 \text{ in } \mathbb{Q}^+ \Rightarrow x^{q_1} \leq x^{q_2}.$$

Per $0 < x < 1$ vale la dis. opposta.



Per $\alpha \in \mathbb{R}^+$ posso porre per $x \geq 1$

$$\rightarrow x^\alpha := \sup \{ x^q \mid q \in \mathbb{Q}^+, q \leq \alpha \}$$

$$\text{es. } x^{\sqrt{2}} = \sup \{ x^q \mid q \in \mathbb{Q}, q \leq \sqrt{2} \}$$
$$= \sup \{ x^1, x^{1,4}, x^{1,41}, x^{1,414}, \dots \}$$

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}^+$

e

$0 < x < 1$

$$x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$$

$$\begin{aligned} \alpha &> 0 \\ 0^\alpha &= 0 \\ 1^\alpha &= 1 \end{aligned}$$

Questo mi def x^α per $x \geq 0$ e $\alpha > 0$.

Se $x > 0$ e $\alpha < 0$ pongo

$$x^\alpha := \frac{1}{x^{-\alpha}}$$

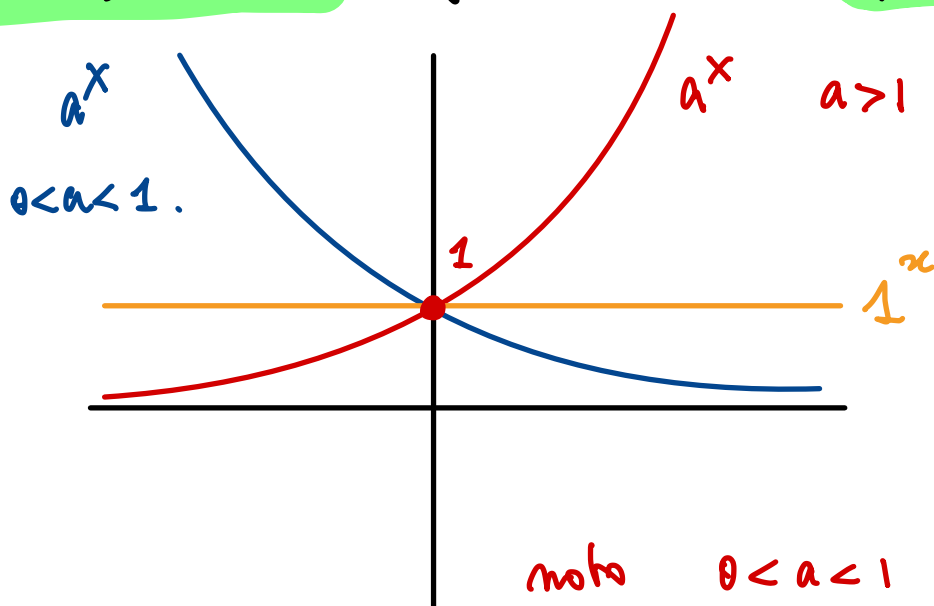
2. Funzione exp e log.

Avendo definito le potenze a esponente reale forse considerare

$$a > 0, a \neq 1$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = a^x$$



$$a^0 = 1 !$$

$$\text{nota } 0 < a < 1 \quad a^x = \left(\frac{1}{a} \right)^{-x}$$

Logaritmo

Dato $a > 0, a \neq 1$

Per $y > 0$

$$x = \log_a y$$

se

$$a^x = y$$

x è l'esponente
da dare ad a per avere y .

$$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

Abbiamo due identità :
$$\begin{cases} a^{\log_a y} = y \\ \log_a (a^x) = x \end{cases}$$

$$y > 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Dalle proprietà dell'esponenziale

$$\begin{cases} a^x a^y = a^{x+y} \\ (a^x)^y = a^{xy} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \\ \log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x \end{cases}$$

$$x > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

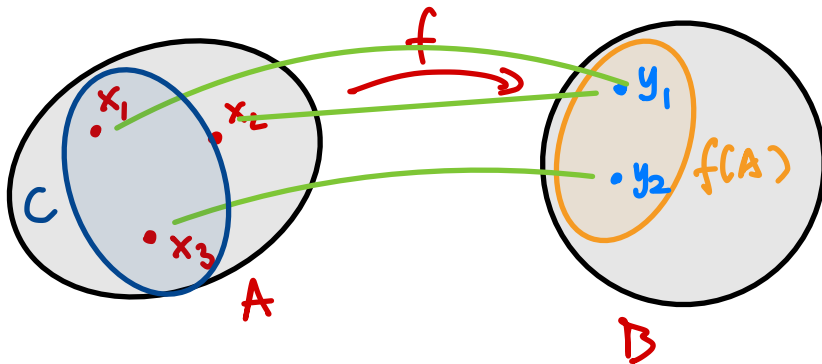
Insieme di definizione. Restrizioni

Data $f: A \rightarrow B$ questa potrebbe non essere suriettiva perché $f(A) \neq B$

$$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} \subseteq B$$

immagine di A tramite f

(immagine di f) $\leftarrow$ quando A è tutto il dom.



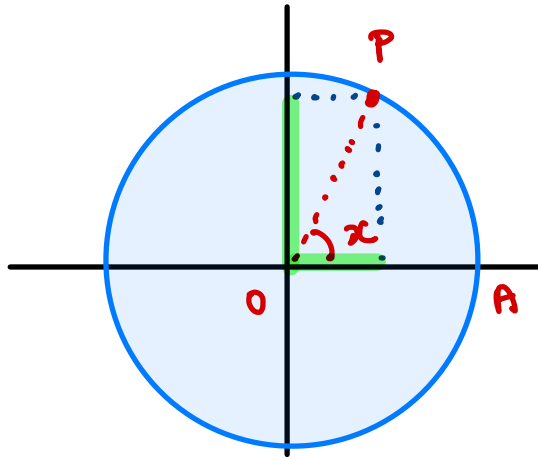
Se feno ad $f: A \rightarrow f(A)$ questa diventa suriettiva. Per l'iniettività?

Mi posso chiedere se $\exists C \subseteq A$ tale per cui $f|_C: C \rightarrow B$ sia iniettiva.

$$f|_C: C \rightarrow B \quad f|_C(x) = f(x) \quad x \in C.$$

" f ristretta a C ".

Esempio (funzioni seno e coseno)



$$\overline{OA} = 1 \quad \widehat{AOP} = x.$$

$$P(\cos x, \sin x)$$

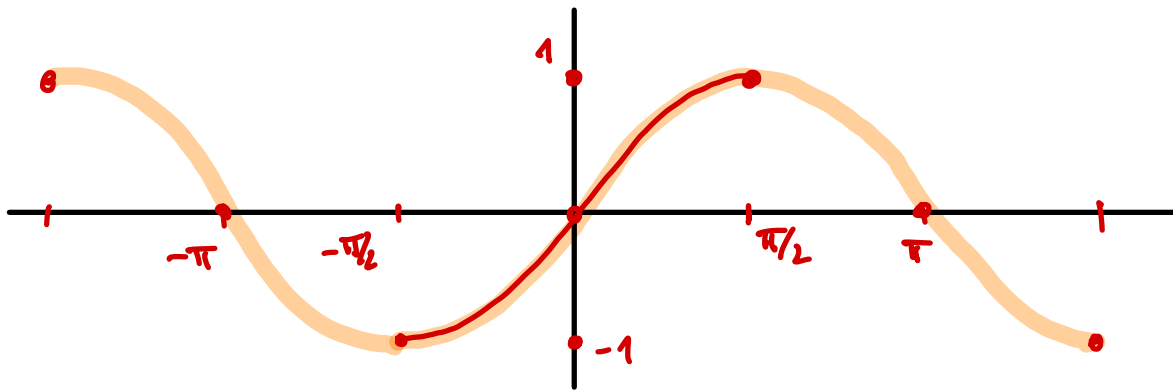
$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

D'altra parte $|\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Potrei considerare $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.
che ora è suriettiva.

Sappiamo che $\sin(x) = \sin(x + 2\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
quindi non è iniettiva.



Considero $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

ed è sia iniettiva che suriettiva.

Su questo intervallo è def la inversa.

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

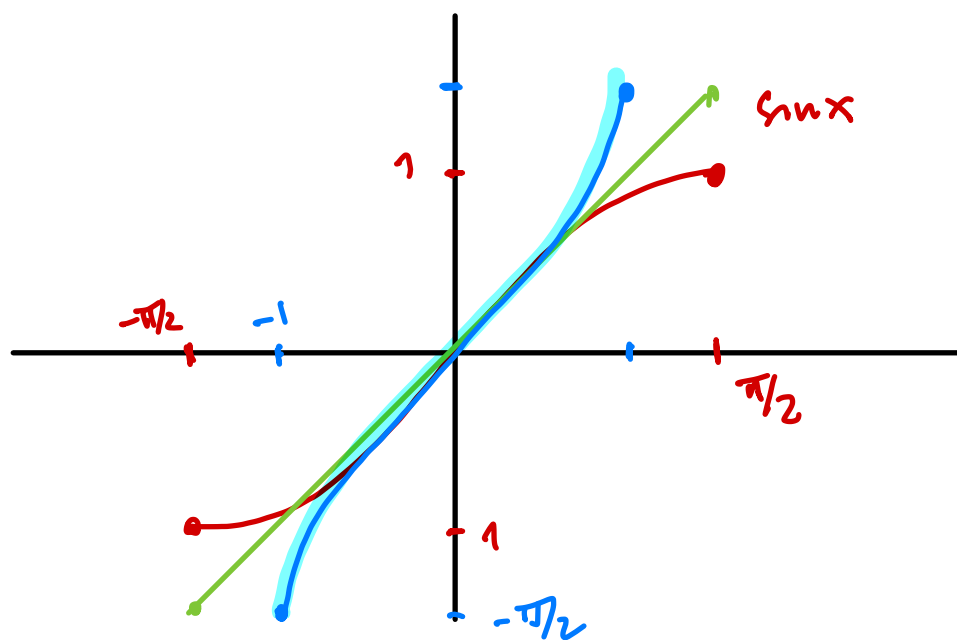
$$x \longmapsto \arcsin x$$

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x$$

con $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

⑦ Grafico di $\arcsin$?

Notiamo $\arcsin x = y \iff (x, y) \in G_{\arcsin}$
 $\sin y = x \iff (y, x) \in G_{\sin}$



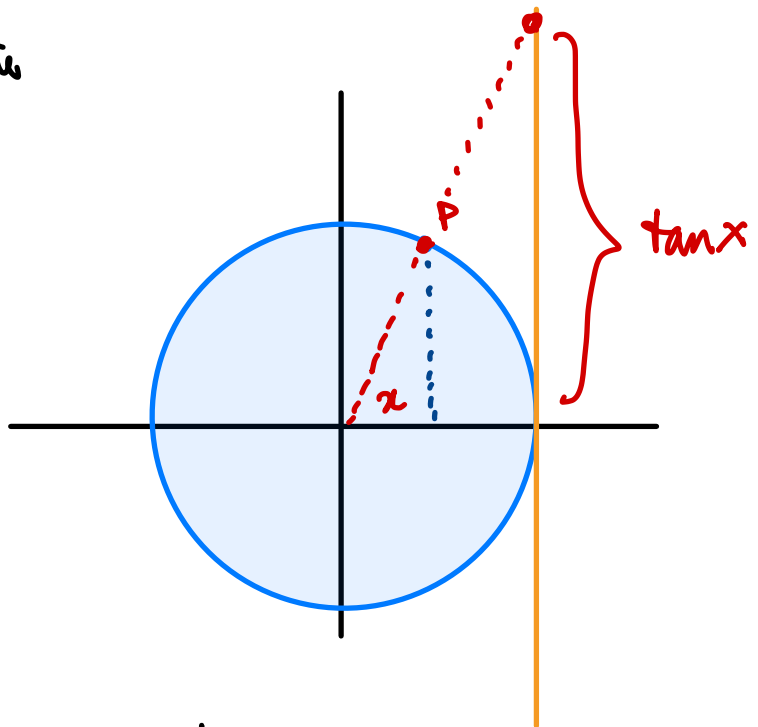
Analogamente $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$
 biunivoca e

definire $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$.

La funzione tangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{\tan x}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}$$



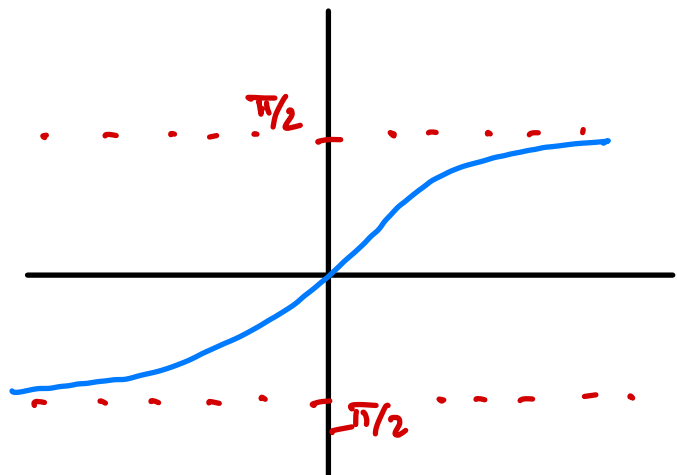
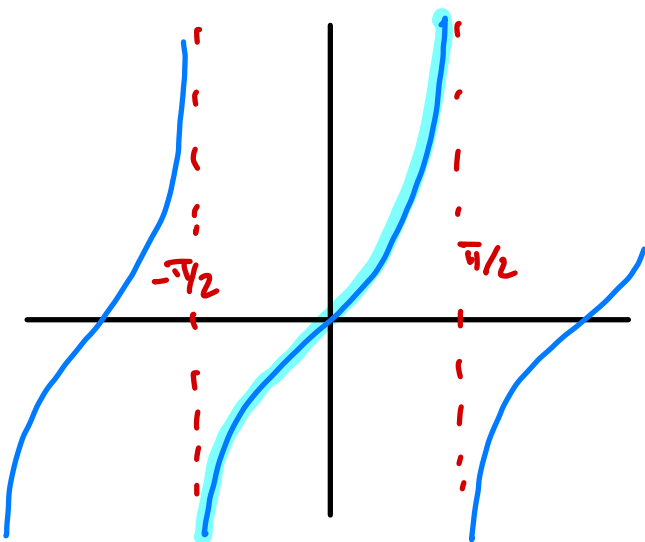
$\tan x$ è definito quando $\cos x \neq 0$.

$$\text{cioè } \mathbb{R} - \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Quindi $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$
biunivoca.

La sua inversa è

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



Funzioni iperboliche

Così come $\sin$, $\cos$ soddisfano

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$x^2 + y^2 = 1$
 $P(\cos x, \sin x)$ sta sul
cerchio

Possiamo definire delle funzioni iperboliche

$$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

che soddisfano la relazione

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$P(\cosh x, \sinh x)$
sta sull'iperbole
 $x^2 - y^2 = 1$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Commento in insieme di def.

Una funzione "tecnicamente" è una
 $f: A \rightarrow B$ con dominio e codominio
assegnati.

Per funzioni reali di variabile reale
definite da una espr. analitica

$$(*) \quad f(x) = \sqrt{1 - \log_a x} \quad a > 1$$

mi potrei chiedere qual'è il più grande sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ in cui f è ben definita.

D è il dominio naturale di f

Nel nostro caso $(*)$

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0, 1 - \log_a x \geq 0 \}.$$

ovvero $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \log_a x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a > 1 \\ 0 < x \leq a \end{matrix}$

Esercizio

Inventare su opportuni intervalli (o domini di definizione) le funzioni seguenti e esplicitare la funzione inversa

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

$$f(x) = 2x - |x|$$

$$f(x) = \sqrt[7]{1 - x^7}$$

← calcolare $f \circ f \dots$

Esempio Consideriamo la funzione

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$$

Determinare se f è iniettiva e/o suriettiva.

Se f non suriettiva, trovare l'immagine di f .

$$f(-1) = -1 + 0 = -1$$

$$f(1) = 1 + 0 = 1$$

$$f(0) = 0 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

iniettiva $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$

$$x_1 + \sqrt{1-x_1^2} = x_2 + \sqrt{1-x_2^2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

iniettiva
suriettiva

$$f(x) = a$$

unicità
esistenza $\forall a.$

↑
dato a c'è una sol?
è unica?

$$x + \sqrt{1-x^2} = a.$$

$$\sqrt{1-x^2} = a - x$$

$$1-x^2 = (a-x)^2$$

$$1-x^2 = a^2 + x^2 - 2ax$$

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 - 1)}}{4}$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2 + 2}}{2}$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}$$

$$a-x \geq 0$$

solo se
eq. di 2° gr. in x
con a par.

quando
 $2-a^2 \geq 0$.
c'è una sol.

$$2-a^2 > 0 \quad \text{cioè} \quad -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$$

ci sono due soluzioni

$$2-a^2 = 0 \quad \text{cioè} \quad a = \pm \sqrt{2}$$

c'è una soluzione

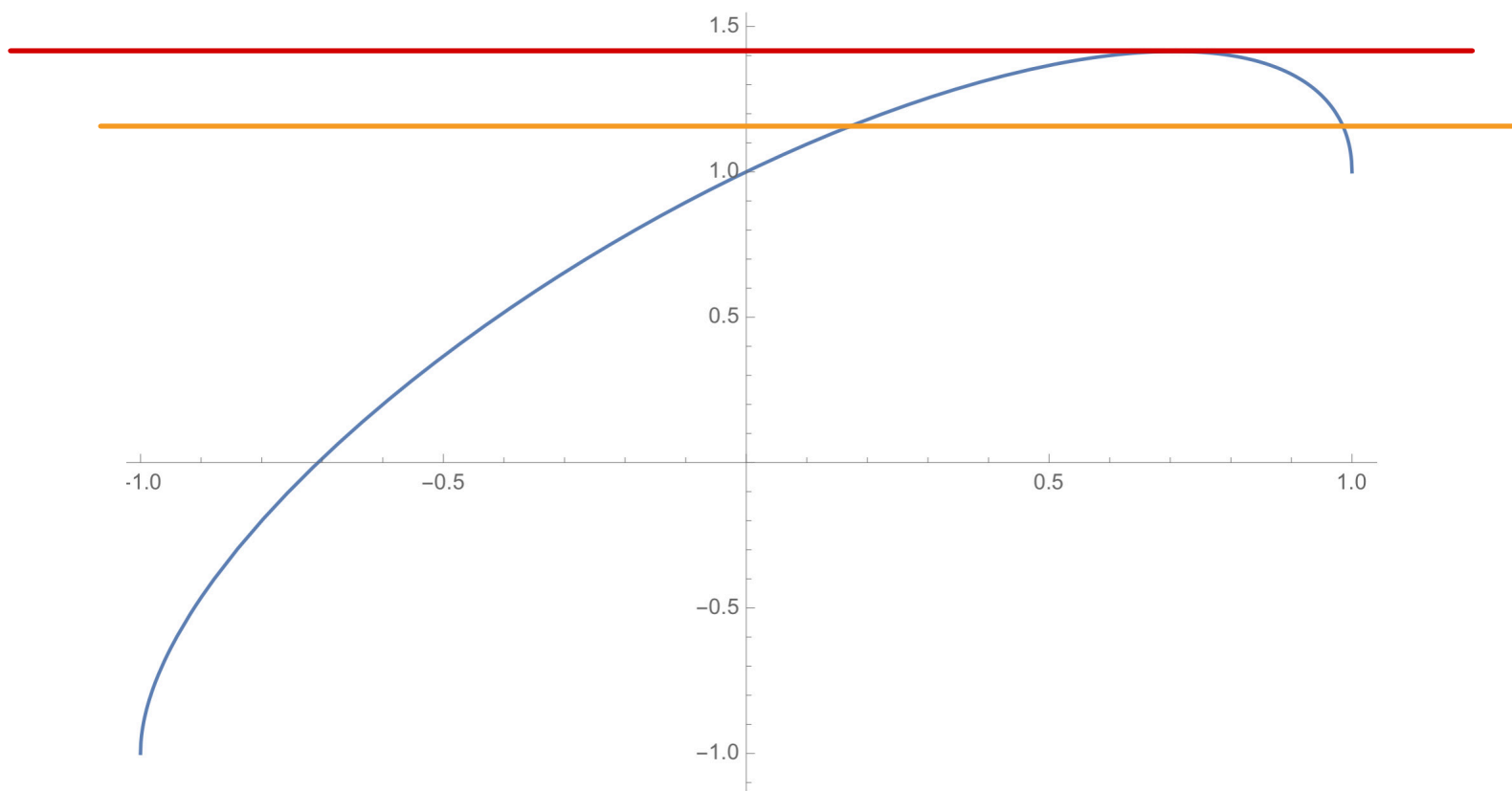
$$2-a^2 < 0 \quad \text{cioè} \quad a > \sqrt{2} \quad \text{o} \quad a < -\sqrt{2}$$

nessuna soluzione.

$$f^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{2-x^2}}{2}$$

$$f \circ f^{-1} = \text{id}$$

$$f^{-1} \circ f = \text{id}?$$



$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$f([-1, 1]) = [-1, \sqrt{2}].$$

5 LIMITI DI FUNZIONI

Def Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ pto acc. per D .
Diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

con $L \in \mathbb{R}$

se vale:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \\ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- noto $0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$
 $|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in I(L, \varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ significa che $\delta = \delta(\varepsilon)$
 δ dipende da ε !
- non è restrittivo imporre $\delta < 1$ ($\delta < \delta_0$).
(posso restringermi a δ suff. piccoli)

Esempio: $\lim_{x \rightarrow 1} 3x + 2 = 5.$

noto $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 3x + 2$
 $D = \mathbb{R} \quad x_0 = 1 \quad \text{ptto acc.}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \underbrace{0 < |x-1| < \delta}_{1-\delta < x < 1+\delta} \Rightarrow \underbrace{|(3x+2)-5|}_{|f(x)-L|} < \varepsilon.$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e anche δ .

Risolvo

$$|3x+2-5| < \varepsilon$$

$$|3x-3| < \varepsilon$$

$$|A| \leq B$$

$$-\varepsilon < 3x-3 < \varepsilon$$

$$-B \leq A \leq B$$

$$3-\varepsilon < 3x < 3+\varepsilon$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{3}$$

Prendo $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ ed ho verificato la def.

Esempio

Verifico che

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3x+2 \neq 6$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e considero

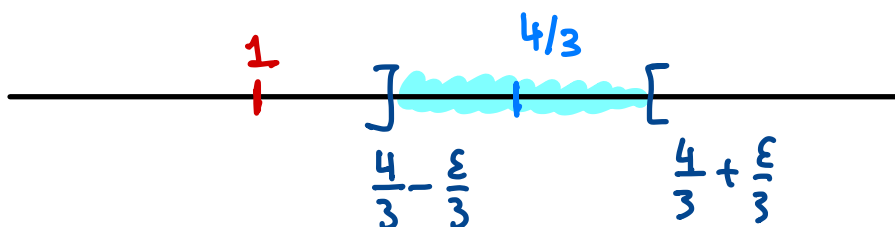
$$f(x) - L$$

$$|3x+2-6| < \varepsilon$$

$$|3x-4| < \varepsilon$$

$$4-\varepsilon < 3x < 4+\varepsilon$$

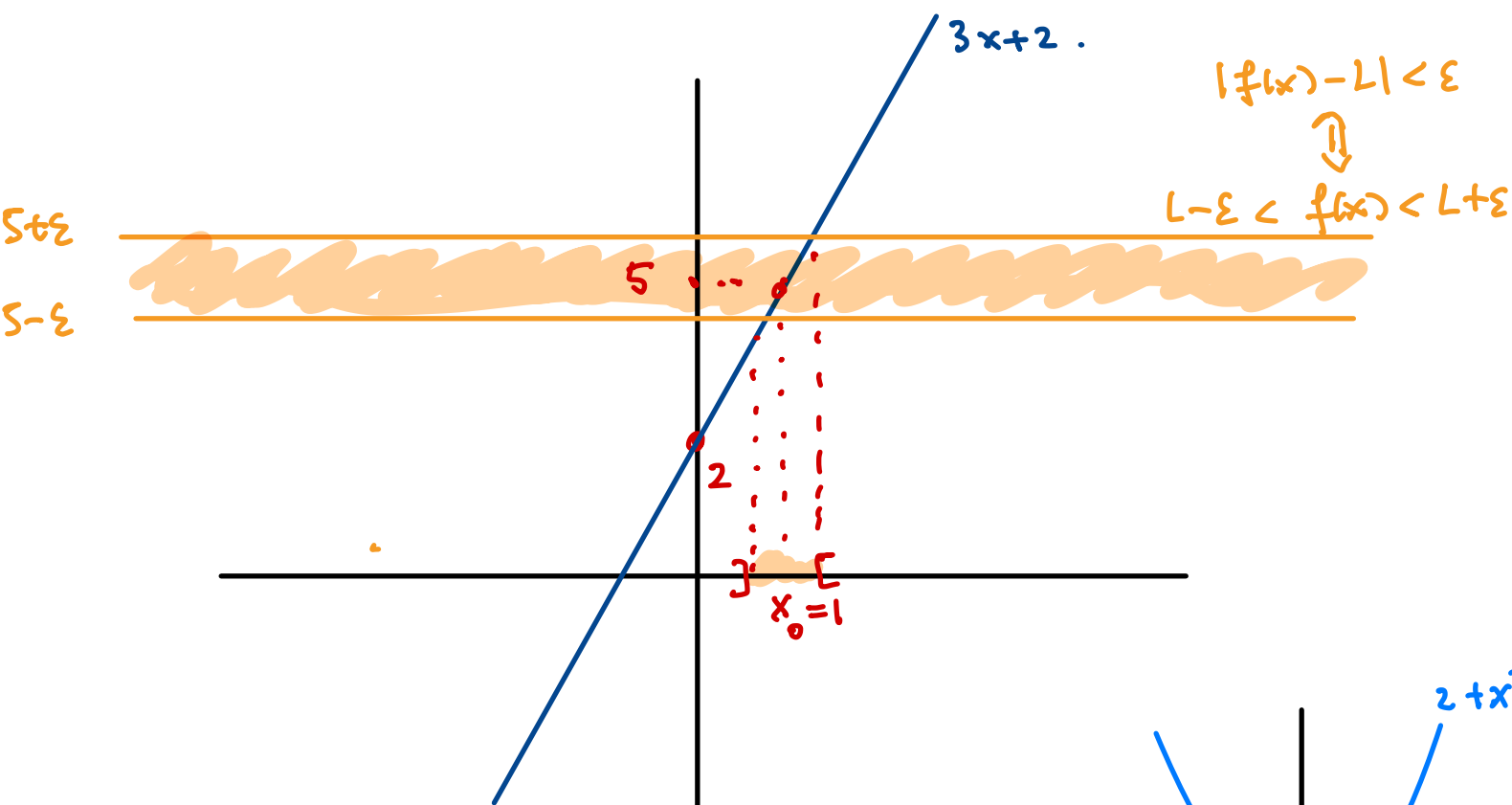
$$\frac{4}{3} - \frac{\varepsilon}{3} < x < \frac{4}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$



Per $\varepsilon = \frac{1}{2}$ abbiamo

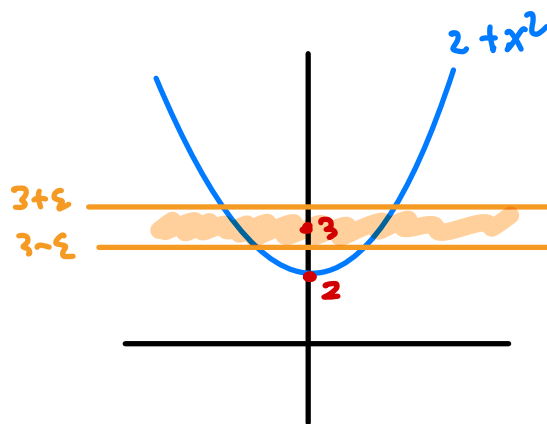
$$1 < \frac{7}{6} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} < x < \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6}$$

$$\frac{7}{6} < x < \frac{9}{6} \quad \text{non \u00e9 intorno di } x_0 = 1 !$$



Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2 + x^2 = 3$$



col proc. di prima
fisso $\varepsilon > 0$ arb.

$$(\varepsilon < 1)$$

$$|2 + x^2 - 3| < \varepsilon$$

$$|x^2 - 1| < \varepsilon$$

$$1 - \varepsilon < x^2 < 1 + \varepsilon$$

$$-\sqrt{1 + \varepsilon} < x < -\sqrt{1 - \varepsilon} \quad \cup$$

$$\sqrt{1 - \varepsilon} < x < \sqrt{1 + \varepsilon} \quad \leftarrow$$

sceglgo δ :

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \quad \leftarrow$$

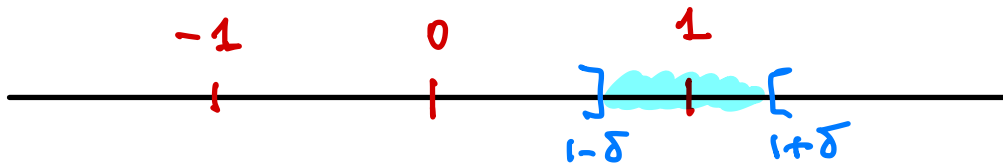
Si può ragionare diversamente

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

ipotizzo $|x - 1| < \delta$ e ottengo $|f(x) - L|$

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |2 + x^2 - 3| \\ &= |x^2 - 1| \\ &= |x + 1| |x - 1| \leq 3\delta. \end{aligned}$$

↑
vorrei che non fosse grande.



Per $\delta < 1$ posso dire $|x - 1| < \delta$
implica $|x + 1| \leq 3$

$$\begin{aligned} \text{Infatti } |x + 1| &= |x - 1 + 2| \leq |x - 1| + 2 \\ &\leq \delta + 2 \leq 3. \end{aligned}$$

$$\forall \delta > 0, \delta < 1 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 3\delta$$

Fisso $\varepsilon > 0$ arbitrario. Basta prendere
 $\delta < 1$, $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ (cioè $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$).

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 3\delta < \varepsilon.$$

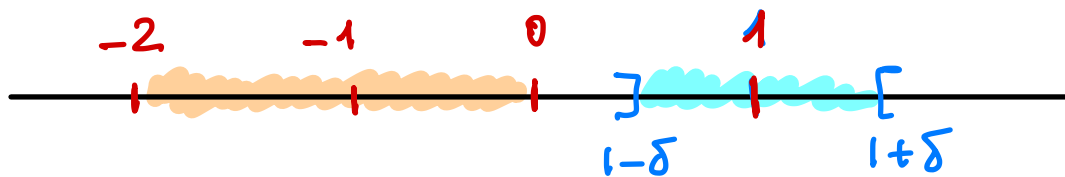
Esempio $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$

Ipotesi $|x-1| < \delta$ e considero

$$|f(x) - L| = \left| \frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3} \right|$$

$$= \left| \frac{3(x+1) - 2(x+2)}{3(x+2)} \right|$$

$$= \left| \frac{x-1}{3(x+2)} \right| = \frac{|x-1|}{3|x+2|} \leq \frac{\delta}{3 \cdot 2} = \frac{\delta}{6}$$



Se $\delta < 1$ allora $|x-1| < \delta$

implica $|x+2| \geq 2$ ← come si fa a dimostrare?

allora $\frac{1}{|x+2|} \leq \frac{1}{2}$

OSS In generale mi basta saper mostrare

$$\forall \delta > 0 \quad \delta < \delta_0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < C\delta$$

↑ piccolo.

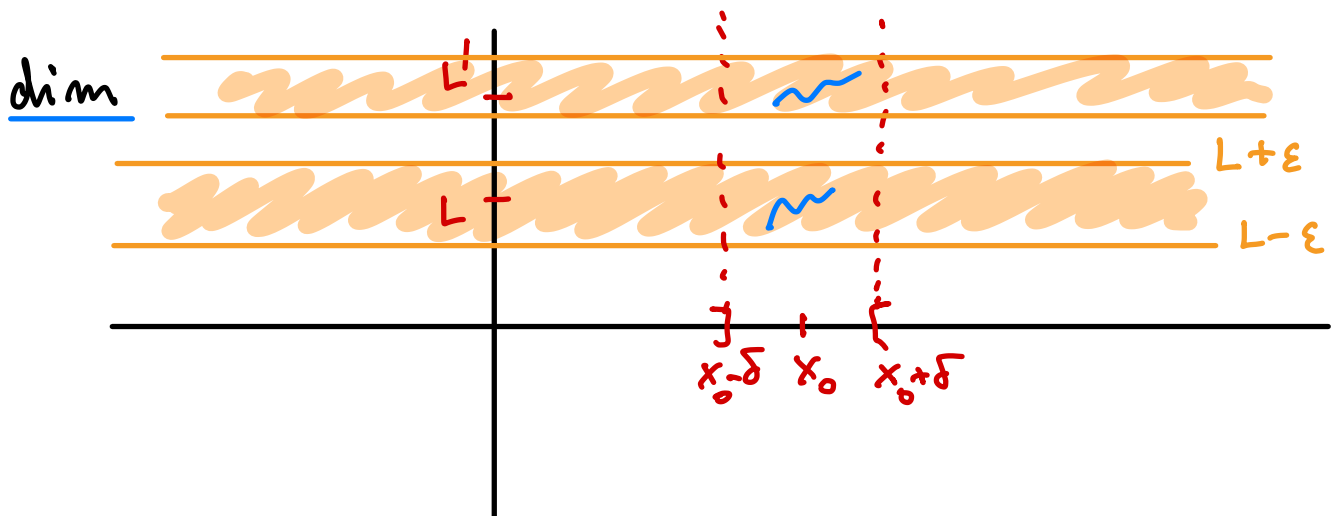
↑ per una certa $C > 0$.

Teorema (unicità del limite).

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 pto acc. D .

Se vale

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L' \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow L = L'$$



Supponiamo per assurdo $L \neq L'$. Allora
 $d := |L - L'| > 0$. Per ipotesi:

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \stackrel{(*)}{\Rightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta' \stackrel{(**)}{\Rightarrow} |f(x) - L'| < \varepsilon \end{array}$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Se prendo $\delta'' := \min \{ \delta, \delta' \}$
allora per $0 < |x - x_0| < \delta''$ vale $(*)$ e $(**)$

Quindi forse scrivere

$$\begin{aligned}
 0 < d &= |L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \\
 &\leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| \\
 &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
 \end{aligned}$$

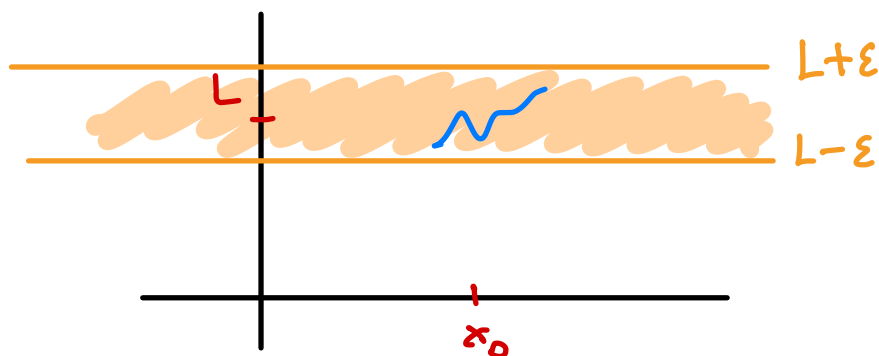
Ne segue: $\forall \varepsilon > 0 \quad 0 < d < 2\varepsilon$.
 Contraddizione. (prendere $\varepsilon = d/4$).

Teorema (della permanenza del segno)

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 pto di acc. per D .

Se vale $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, con $L > 0$
 (risp $L < 0$)

allora $\exists \eta > 0 : \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > 0$.
 ($f(x) < 0$)



dim caso $L > 0$. Per definizione

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Prendo $\varepsilon = \frac{|L|}{2} = \frac{L}{2}$ (per $L > 0$).

Fissiamo x t.c. $0 < |x - x_0| < \delta$

Esplucitando ho

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$0 < \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{L}{2}$$

Basta scegliere $\eta = \delta$.

Osserviamo Ho dimostrato $f(x) > \frac{L}{2} > 0$.

per $L < 0$ dimostriamo $f(x) < -\frac{|L|}{2}$

Corollario sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 pto acc per D

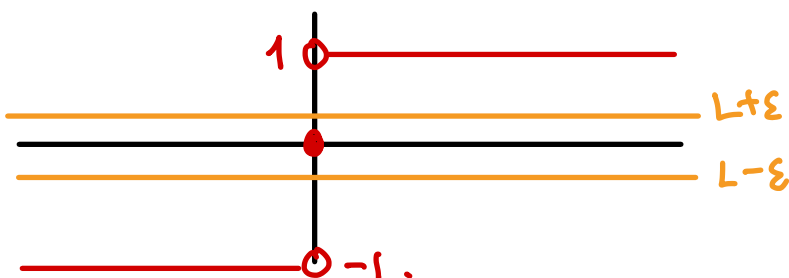
Se vale $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ allora

$$\exists \eta > 0 : 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| > \frac{|L|}{2}$$

Esempi ① Funzione "segno"

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = ? \quad \text{non esiste.}$$

Non può essere $\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = L > 0$

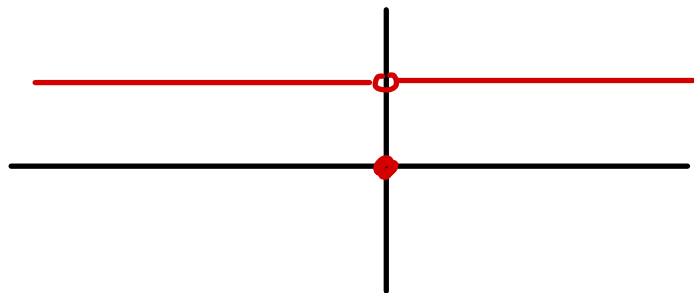
perché per teo. per. segno dovremmo avere $s(x) > 0$ in un intorno di $x_0 = 0$.

Per lo stesso motivo non può essere $L < 0$.

Non può essere nemmeno $L = 0$ in quanto per $\varepsilon = 1/2$ la condizione di limite non è verificata $|s(x)| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

oss la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

soddisfa $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.



Es (funzione di Dirichlet)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

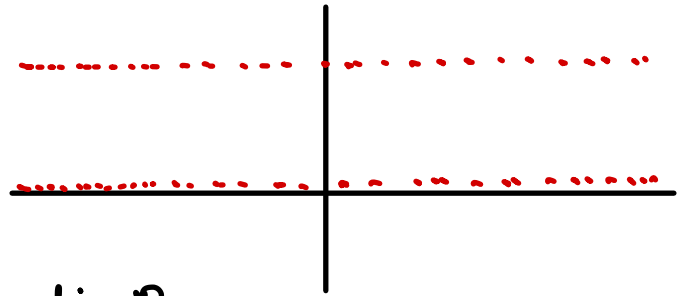
In questo caso $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste
per nessun $x_0 \in \mathbb{R}$.

Essendo $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

densi in $\mathbb{R}$. In

ogni intervallo $]a, b[$ di $\mathbb{R}$

la funzione f vale sia 0 che 1.



Esercizio $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste.