

Teorema (di Bolzano-Weierstrass).

Ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato e **infinito** ammette almeno un punto di accumulazione.

oss Se E è finito non ha punti di accumulazione.

Se l'insieme è infinito ma non limitato può avere o non avere pti accumulazione

es $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ tutti pti di $\mathbb{R}$ sono acc

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ non ha pti di acc.

idea della dim

costruire una sezione di $\mathbb{R}$

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid E \cap [x, +\infty[\text{ è finito} \}$$

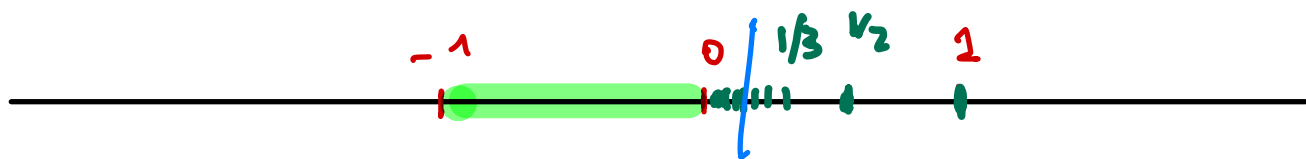
$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid E \cap [x, +\infty[\text{ è infinito} \}$$

dimostrare che (S, D) sezione.

dimostrare che l'el. separatore $\bar{e}$ di acc.

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \}$$

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}.$$



$$E =]-1, 0[\cup \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Commento $+\infty$ e $-\infty$ non sono elementi di $\mathbb{R}$ quindi non possono essere di acc.

Tuttavia si può considerare $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ estendendo la nozione di intorno di un punto x_0 e $I(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$

definendo intorni di $+\infty$ come $]M, +\infty[$
intorni di $-\infty$ come $] -\infty, K[$.

Notazione: $\sup E = +\infty$ se
 E non ha maggioranti.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y = x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$(2+i) + (2-i) = 4.$$

$$x^3 + px + q = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

$$x^3 = 15x + 4 \quad \sqrt{-121}$$

«Quando che'l cubo con le cose appresso [$x^3 + px$]

Se agguaglia à qualche numero discreto [$= q$]

Trovan dui altri differenti in esso. [$u - v = q$]

Dapoi terrai questo per consueto

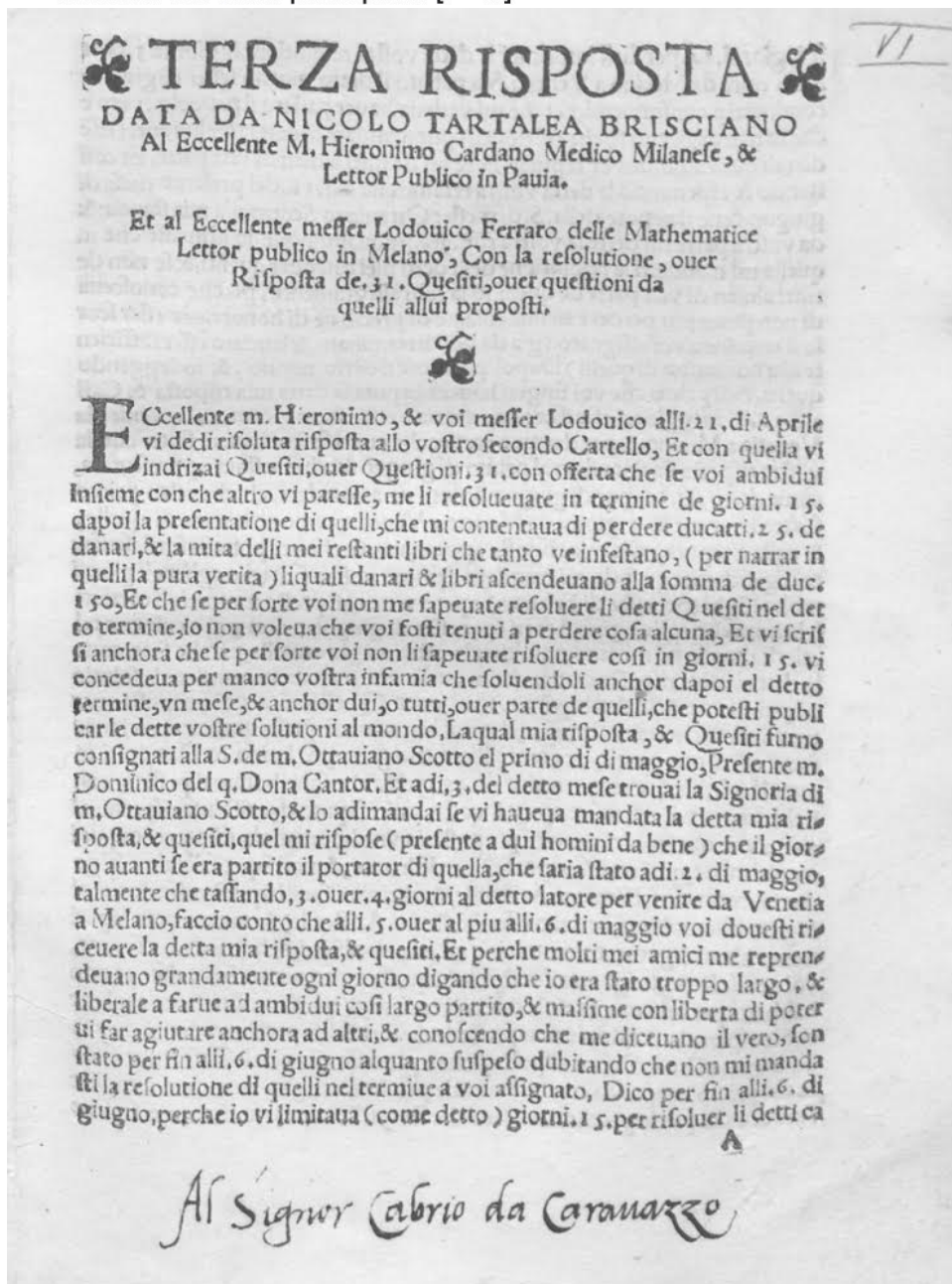
Che'llor prodotto sempre sia eguale [$uv =$]

Al terzo cubo delle cose neto, [$(p/3)^3$]

El residuo poi suo generale

Delli lor lati cubi ben sottratti [$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$]

Varra la tua cosa principale. [$= x$]»



NUMERI COMPLESSI

Esiste un numero i tale che $i^2 = -1$.

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \} \quad \text{numeri complessi}$$

$$z = a + bi \quad \text{forma algebrica}$$

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

pte reale pte immaginaria.

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \quad \mathbb{R} \cong \{ a + 0i \mid a \in \mathbb{R} \}.$$

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

il neutro somma

$$0 = 0 + 0i$$

prod.

$$1 = 1 + 0i$$

Dato $z \in \mathbb{C}$ chi è $w \in \mathbb{C}$: $z+w=0$

$$z = a + bi$$

$$w = -a - bi$$

lo denoto con $-z = -a - bi$ opposto di z .

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Dato $z \in \mathbb{C}$ chi è $w \in \mathbb{C}$: $zw = 1$.

$$\text{"cerco l'inverso"} \quad z^{-1} = \frac{1}{z}$$

se $z = a + bi$ e $w = x + iy$

$$zw = 1 \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$ $\nearrow$
 $(a+bi)(x+iy) = 1+0i$

se $a^2 + b^2 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

se $z = a + bi, a^2 + b^2 \neq 0$
 $z \neq 0 \text{ in } \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \bar{z}^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

def Dato $z = a + bi \in \mathbb{C}$. pongo.

$$\bar{z} = a - bi$$

CONIUGATO di z

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

MODULE di z .

Osservo che

$$\bar{z}^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

D'altra parte $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

cioè $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

$$\bar{z}^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} .$$

Esempio Calcolare $(1+i)^{-1}$.

$$\begin{aligned}(1+i)^{-1} &= \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3-i}{1+i} &= \dots = (3-i) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ &= \dots\end{aligned}$$

Commento Si può introdurre $\mathbb{C}$ come segue
("senza" la i)

$$\mathbb{C} \simeq \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Coppie ordinate di n. reali.

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d).$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc).$$

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

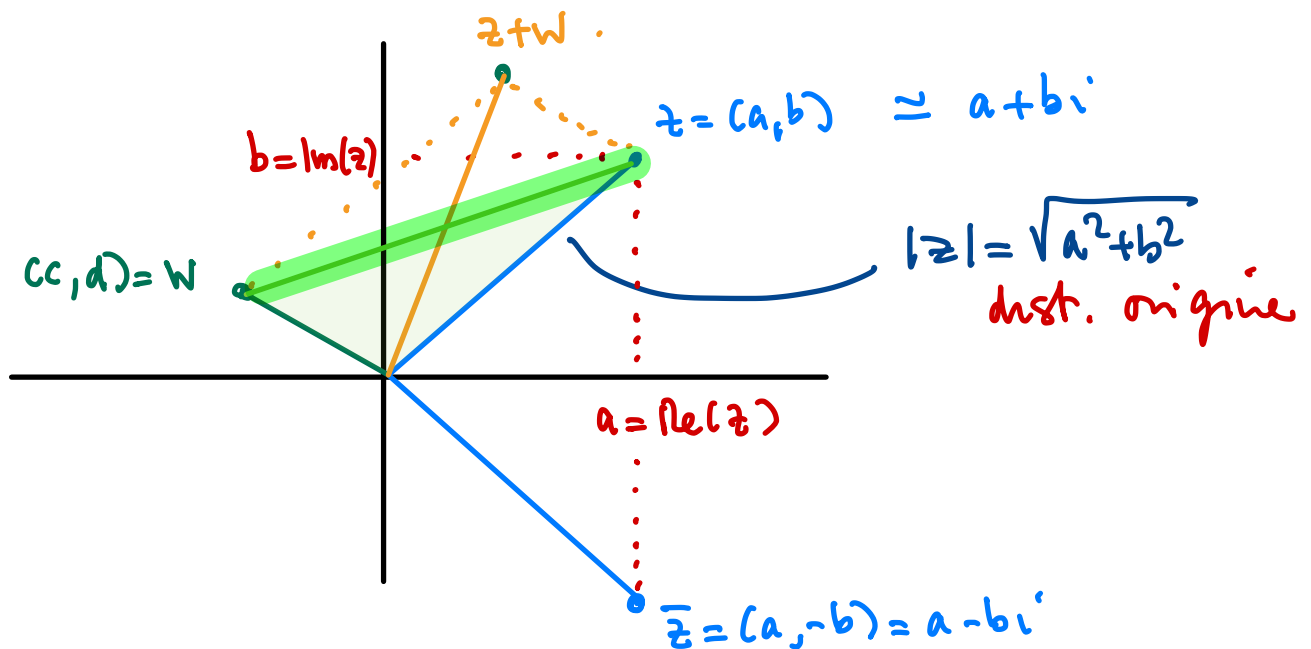
" $i \cdot i = -1$ ".

$$a+bi \simeq (a, b)$$

$$0+1i \simeq (0, 1)$$

Interpretazione geometrica

Poniamo identificare $a+bi \in \mathbb{C}$
con il punto (a,b) del piano cartesiano



$$w + (z - w) = z$$

Posso definire $d(z, w) = |z - w|$

Vale la dis. triangolare

$$d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w).$$

Per dimostrarla mi serve

lemma Dati $z, w \in \mathbb{C}$, vale

$$(i) \quad |zw| = |z| \cdot |w|.$$

$$(ii) \quad |z+w| \leq |z| + |w| \quad (\text{dis. triangolare})$$

dim (i) $|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw}$

$$= zw \cdot \overline{z} \overline{w}$$

$$= z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}$$

$$= |z|^2 \cdot |w|^2$$

ho usato $\overline{zw} = \overline{z} \overline{w}$ e $zw = wz$. $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

(ii) $|z+w|^2 = (z+w) \overline{(z+w)}$

$$= (z+w) (\overline{z} + \overline{w})$$

uso che $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

$$= z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z}$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + \underbrace{z\overline{w} + w\overline{z}}$$

noto che $z\overline{w}$ e $w\overline{z}$ sono l'uno il coniugato dell'altro : $\overline{z\overline{w}} = \overline{z} \overline{\overline{w}} = \overline{z} w = w\overline{z}$

noto anche che $\alpha + \overline{\alpha} = 2 \operatorname{Re}(\alpha)$ per $\alpha \in \mathbb{C}$

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\overline{w})$$

$$\underbrace{? \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|}_{(|z|+|w|)^2}$$

Per concludere uso che

$$\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z||w| \quad \text{in quanto}$$

$$\forall \alpha = a+bi \quad \operatorname{Re}(\alpha) \leq |\alpha| \quad a \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

donque $\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|$.

Riassunto delle proprietà utilizzate
verificare per esercizio!

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vale

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$$\alpha + \overline{\alpha} = 2 \operatorname{Re}(\alpha)$$

$$\overline{\alpha \beta} = \overline{\alpha} \overline{\beta}$$

$$\alpha - \overline{\alpha} = 2i \operatorname{Im}(\alpha)$$

$$|\alpha| = |\overline{\alpha}|$$

$$\operatorname{Re}(\alpha) \leq |\alpha|$$

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$$

$$\operatorname{Im}(\alpha) \leq |\alpha|.$$

Forma trigonometrica

Identificando $z \in \mathbb{C}$ con (a, b) nel piano
e ponendo in coordinate polari

$$z \simeq (a, b) \simeq (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

forma trigonometrica.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

mentre θ è un argomento di z

θ = angolo definito a meno di 2π
non è unico!

Se $\theta \in [0, 2\pi[$ angolo principale

Nota: $z = a + bi$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \left(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_x + i \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_y \right)$$

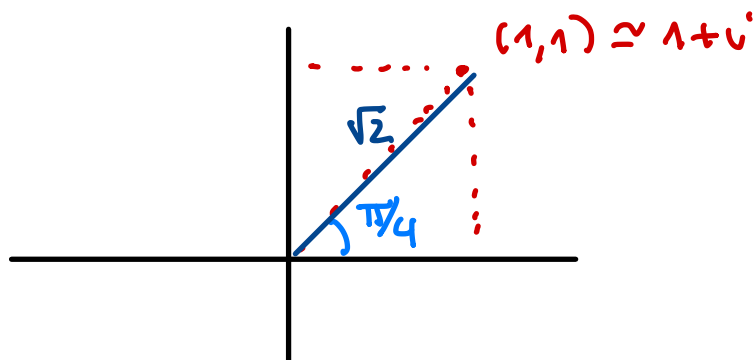
$$x^2 + y^2 = 1.$$

$$= |z| (\cos \theta + i \sin \theta).$$

es $z = 1 + i$ $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$



Passiamo al prodotto di n. complessi

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$w = R (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned}
 zW &= rR (\cos\theta + i\sin\theta) (\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
 &= rR \left[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) \right. \\
 &\quad \left. + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \right].
 \end{aligned}$$

$$zW = rR [\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)]$$

$$|zW| = |z||W|$$

$$\arg(zW) = \arg(z) + \arg(W)$$

In particolare per $z=W$

$$z^2 = r^2 (\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)).$$

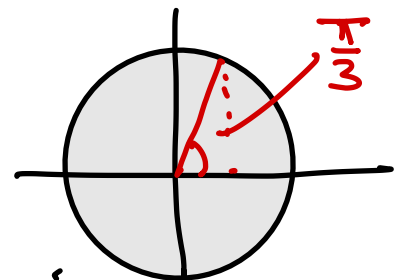
più in generale per induzione si ha

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

es Calcolare $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = z^6$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

$$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$



$$z^6 = \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 1 + 0i$$

Notazione esponenziale

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta + i \sin \theta$$

molica num. compl. di modulo 1
e $\arg = \theta$.

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta}.$$

dove θ è l'argomento di z .

Oss Con l'aiuto di questa notazione
uno potrebbe definire l'esponenziale
complesso. Se $z = a + bi$
$$e^z = e^{a+ib} \stackrel{\text{def}}{=} e^a \cdot e^{ib}$$
$$= e^a (\cos(b) + i \sin(b)).$$

Se riscriviamo la regola del prodotto

$$z = r e^{i\theta}, \quad w = R e^{i\varphi}$$

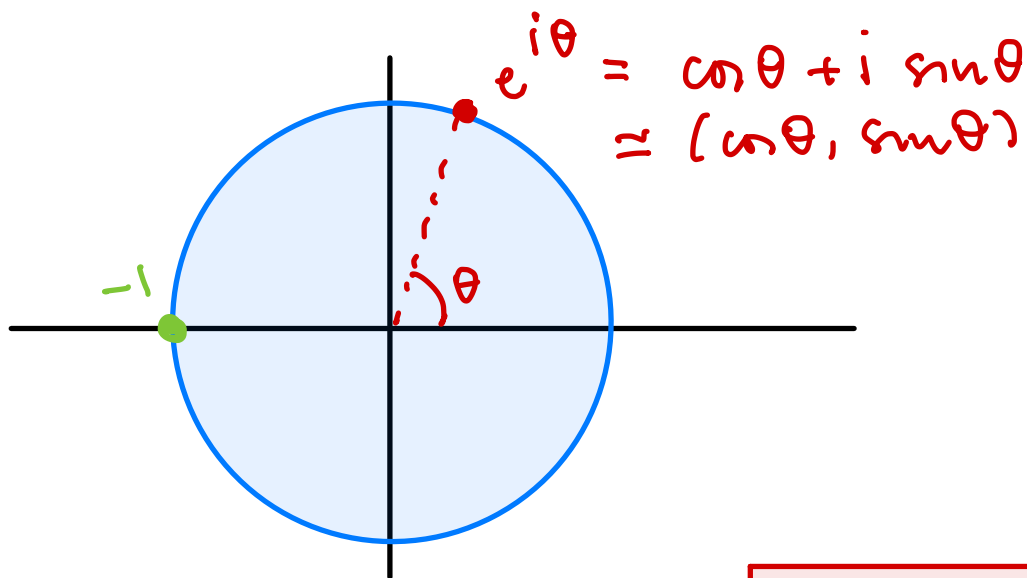
$$zw = rR e^{i(\theta+\varphi)}$$

In particolare

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

Geometricamente

$e^{i\theta}$ lo rappresenta



Noi amo $e^{i\pi} = -1 \Rightarrow$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

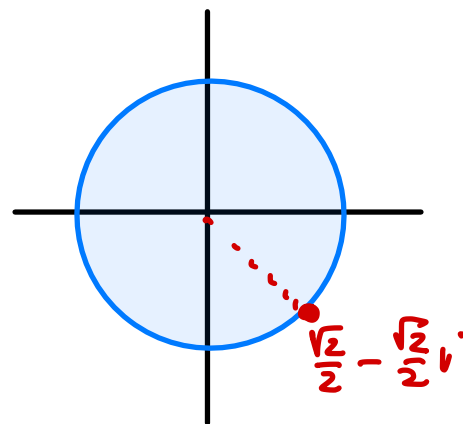
Esempio Scrivere $z = 3 - 3i$ in
forma esponenziale.

$$|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$z = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 3\sqrt{2} e^{i\frac{7}{4}\pi}$$



Esempio Scrivere $z = \frac{1-2i}{1+i}$

in forma algebrica, trig, exp.

$$\begin{aligned} z &= (1-2i) \cdot (1+i)^{-1} \\ &= \frac{1-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i-i-2}{1^2+1^2} = \frac{-1-3i}{2} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

$$z = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}}i\right)$$

ha modulo 1.

$$= \sqrt{\frac{5}{2}} (\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{\frac{5}{2}} e^{i\theta}$$

noto che $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 3 \Rightarrow \tan \theta = 3$,

notare però che $\operatorname{Re}(z) < 0$, $\operatorname{Im}(z) < 0$
importanti per det. il valore di θ
a meno di 2π .

Radici n-esime di un numero complesso

Dato $w \in \mathbb{C}$ cerchiamo le soluzioni

$$z^n = w \quad z \in \mathbb{C}$$

Partiamo da $z^2 + 1 = 0$ cioè
 $z^2 = -1 \quad (*)$

Posso ragionare così: scrivo $z = r e^{i\theta}$
(con r, θ incognite).

$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

D'altra parte $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$

Quindi $(*) \Leftrightarrow r^2 e^{i2\theta} = 1 \cdot e^{i\pi}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \pi \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 & (\text{ricorda: } r \geq 0) \\ \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Basta selezionare i valori di θ in $[0, 2\pi[$
(o in intervallo di ampiezza 2π)

$$r=1 \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{3}{2}\pi.$$

i due valori in $[0, 2\pi[$.

$$z_1 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= i$$

$$z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

$$= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -i$$

Esempio Se provo a risolvere

$$z^2 = i$$

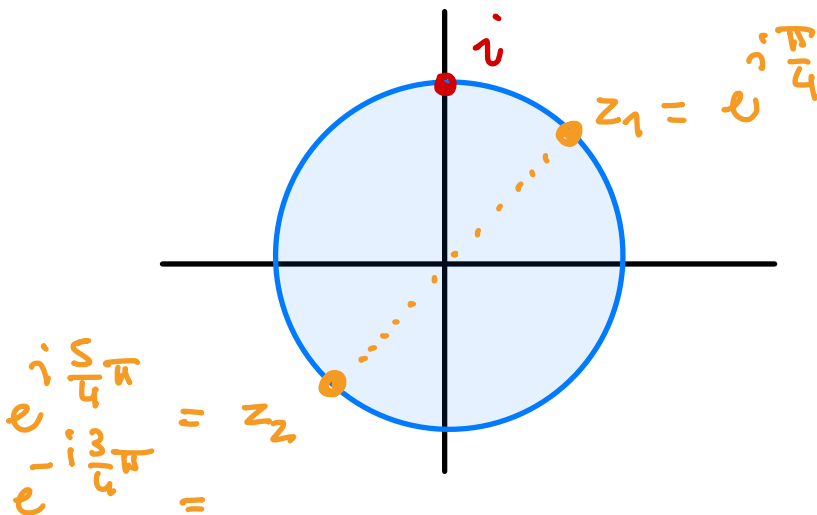
$$z = r e^{i\theta}$$

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta}$$

$$i = 1 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} ; \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Caso generale

Se cerco le soluzioni di
 $z^n = w$, $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\theta} \\ z^n &= r^n e^{in\theta} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} r^n = R & (r > 0) \\ n\theta = \varphi + 2k\pi & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

scrivo

$$w = R e^{i\varphi} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

le soluzioni sono proprio n
(all'interno di un int di amp 2π)

$$z_k = \sqrt[n]{R} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

n soluzioni distribuite tutte con
stesso modulo!

Osserva che con queste scelte di k
l'argomento sta tra $\frac{\varphi}{n}$ e $\frac{\varphi}{n} + 2\pi$.

Esempio Risolviamo

$$z^3 = 8i$$

Innanzitutto $8i = 8 e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$z = r e^{i\theta}$$

$$z^3 = r^3 e^{i3\theta}$$

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

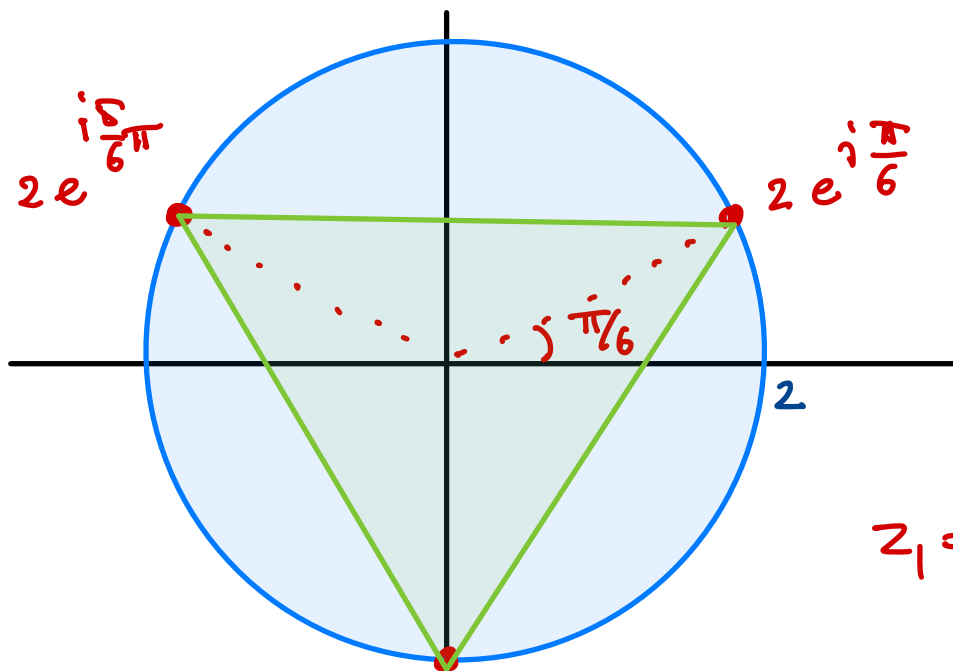
$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

prendo $k = 0, 1, 2$ turno

$$z_0 = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 = 2 e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_2 = 2 e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i.$$



$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3} + i)^3 &= (\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + i)^2 \\
 &= (\sqrt{3} + i)(3 + 2\sqrt{3}i - 1) \\
 &= (\sqrt{3} + i)(2 + 2\sqrt{3}i) \\
 &= \cancel{2\sqrt{3}} - \cancel{2\sqrt{3}} + 2i + 6i \\
 &= 8i
 \end{aligned}$$

Esempio Trovare le soluzioni di

$$z^6 = (1+i)^{12} = -64.$$

$$\begin{aligned}
 W &= (1+i)^{12} & |W| &= |(1+i)^{12}| \\
 & & &= |1+i|^{12} \\
 & & &= \sqrt{2}^{12} = 2^6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \arg(W) &= 12 \arg(1+i) = 12 \cdot \frac{\pi}{4} = 3\pi \\
 &= \pi \pmod{2\pi}.
 \end{aligned}$$

$$(1+i)^{12} = 2^6 e^{i\pi} = -64.$$

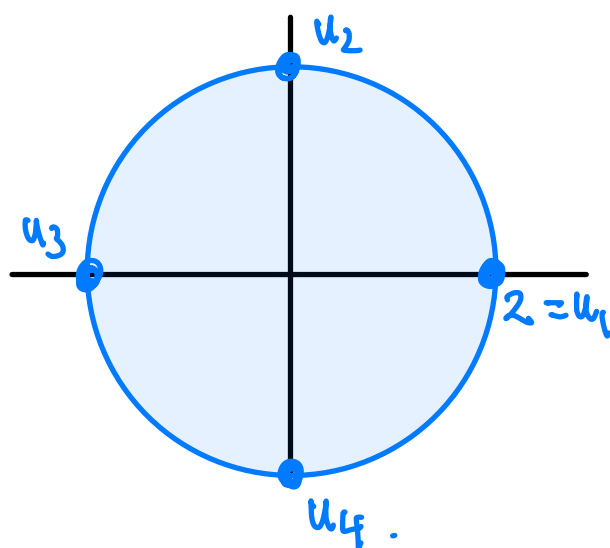
Concludere l'esercizio e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

Esercizio Trovare le soluzioni di

$$\left(\frac{z}{i} + 1\right)^4 = 16$$

Pongo $u = \frac{z}{i} + 1$ e ho $u^4 = 16$

trovo le soluzioni u_1, u_2, u_3, u_4



Poi trovo

$$\frac{z}{i} + 1 = u$$

$$\frac{z}{i} = u - 1$$

$$z = i(u - 1) = iu - i$$



Disegnare le soluzioni z . Notare che non sono più vertici di un quadrato inscritto in una circonferenza con centro nell'origine.

Osservazioni finali

① Da quanto detto segue che

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

ad es $n=2$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \underbrace{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}_{\cos 2\theta} + i \underbrace{(2 \cos \theta \sin \theta)}_{\sin 2\theta}.$$

Analogamente

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = (\dots) + i (\dots)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ \sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \end{cases}$$

② Equazioni di 2° grado

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0.$$

$$iz^2 + \frac{z}{1-i} + 8 = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

interpreto le radici quadrate in $\mathbb{C}$. $\Delta = b^2 - 4ac$.

Esercizi ① Calcolare il valore esplicito di $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ e $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

idea: cercare le radici quadrate in $\mathbb{C}$ di

② Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle equazioni:

① $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1.$

② $i z - i \bar{z} = 1.$

e disegnarle nel piano complesso.