

## Esempio (Disuguaglianza di Bernoulli)

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall a \geq -1$  vale

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad (*)$$

Dimostriamo la (\*) per induzione:

Per  $n=1$  è ovvio  $(1+a)^1 = 1+1 \cdot a$ .

Voglio vedere che  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  cioè

sapendo  $(1+a)^n \geq 1+na$  ip.  $P(n)$

è vero che  $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$  tesi?

D'altra parte  $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a)$

$(1+a \geq 0)$  e Passo induttivo  $\rightarrow \geq (1+na)(1+a)$

$$\geq 1+a+na+na^2$$

$$\geq 1+(n+1)a+na^2$$

$$na^2 \geq 0$$

$$\geq 1+(n+1)a$$

Oss Abbiamo visto

$$A \geq B \text{ e } C \geq 0 \Rightarrow A \cdot C \geq B \cdot C$$

$$\text{se } A \geq B \text{ e } C \leq 0 \Rightarrow A \cdot C \leq B \cdot C$$

Oss Prendendo  $a = \frac{1}{n}$  ottengo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Esempio Dimostrare che esiste  $m_0 \in \mathbb{N}$  tale che

$$2^n \cdot n! \leq n^n \quad \forall n \geq m_0.$$

dove  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .  $n$  fattoriale

ovvero per  $n=1$   $2^1 \cdot 1! \leq 1^1$  Falsa!

$n=2$   $2^2 \cdot 2! \leq 2^2$  Falsa!

$n=3$   $2^3 \cdot 3! \leq 3^3$  Falsa!

$8 \cdot 6$   $27$

Passo induttivo: voglio vedere  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$P(n+1) \quad 2^{n+1} \cdot (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}.$$

Ma  $\underline{2^{n+1}} \cdot \underline{(n+1)!} = \underline{2 \cdot 2^n} \cdot \underline{(n+1) \cdot n!}$

uso  $P(n)$   $\leq 2 \cdot (n+1) \cdot n^n \stackrel{?}{\leq} (n+1)^{n+1}.$

Per concludere ci chiediamo se è vero

$$2 \cancel{(n+1)} n^n \leq \cancel{(n+1)}^{n+1}$$

$$2 n^n \leq (n+1)^n$$

$$2 \leq \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Per  $n=6$  non può vedere che la dis. è verificata

$$2^6 \cdot 6! \leq 6^6$$

Quindi  $P(n)$  è verificata per  $n \geq 6$ .

Oss Possiamo riformulare dicendo

$$0 \leq \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \leq 1 \quad \forall n \geq 6$$

vedremo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0$ .

## Potenza del binomio

Generalizza le formule note

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$\vdots$

$$(a+b)^n = ?$$

cf  
Indagare  
Integrare.

2

## NUMERI REALI

Ricordiamo gli insiemi numerici

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$



Teorema ( $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ).

Non esiste alcun  $q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$

dim (dimostrazione per assurdo)

Supponiamo per assurdo  $\exists q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, q > 0$ .  
 tale che  $q^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$ .

In particolare scelgo  $\text{MCD}(m, n) = 1$   $m, n$  primi tra loro.

vale  $m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ è pari}$   
 $\Rightarrow m \text{ è pari}$

allora  $\exists k \in \mathbb{N} : m = 2k$ , dunque

$$\begin{aligned} (2k)^2 &= 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \\ &\Rightarrow n^2 \text{ è pari} \\ &\Rightarrow n \text{ è pari} \end{aligned}$$

Ho raggiunto una contraddizione.

OSS

A livello logico la dim per  
avendo in base al fatto che

$$P \Rightarrow Q$$

equivalente

$$\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$$

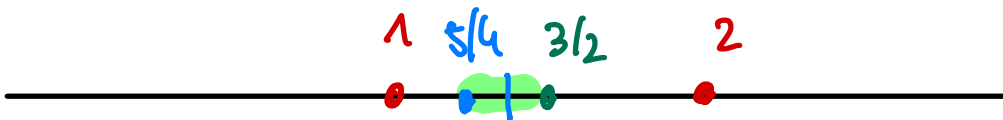
$$\text{ipotesi} \Rightarrow \text{tesi}$$

$$\text{negla tesi} \Rightarrow \text{negla ipotesi.}$$

algoritmo di bisezione

$$\nexists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2 \quad \text{ma} \quad 1^2 < 2, \quad 2 < 2^2$$

quindi  $1 < \sqrt{2} < 2$

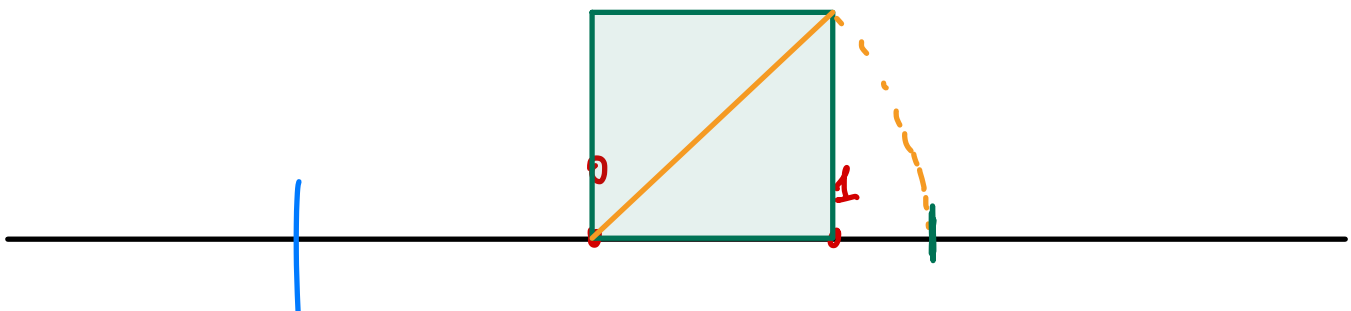


$$(1,5)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25 > 2$$

$$1 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < 2$$

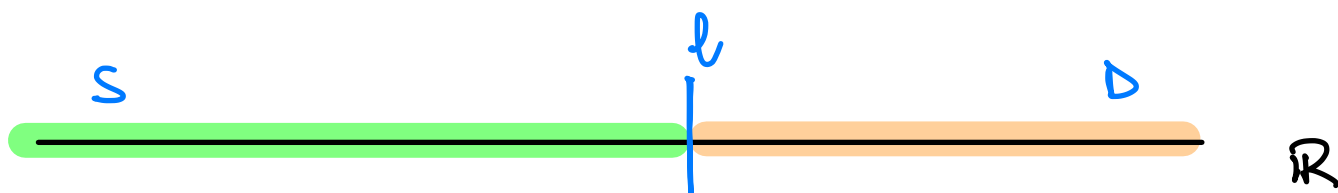
$$1,25 < \sqrt{2} < 1,5$$



## Primo principio di completezza di $\mathbb{R}$

def Una serie di  $\mathbb{R}$  è una coppia di sottoinsiemi  $(S, D)$  NON VUOTI di  $\mathbb{R}$ :

- (i)  $S \cap D = \emptyset$
- (ii)  $S \cup D = \mathbb{R}$
- (iii)  $\forall s \in S, \forall d \in D \Rightarrow s \leq d$ .



Per ogni serie  $(S, D)$  di  $\mathbb{R}$   
esiste un unico  $l \in \mathbb{R}$  tale che  
 $\forall s \in S, \forall d \in D \quad s \leq l \leq d$ .

$l$  è detto **ELEMENTO SEPARATORE**

❗ Questa proprietà non vale per  $\mathbb{Q}$ .

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ e } x^2 \geq 2\}$$

$$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ oppure } x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$

$D \cap S = \emptyset$      $D \cup S = \mathbb{Q}$     ma non esiste  
nessun  $l \in \mathbb{Q}$  :  $\forall s \in S, \forall d \in D \quad s \leq l \leq d$ .

# APPUNDO ASSIOMATICO

Più precisamente, in  $\mathbf{R}$  sono definite due operazioni, la *somma*  $+$  e il *prodotto*  $\times$ , con le seguenti proprietà:

S<sub>1</sub>.  $a + b = b + a$  (proprietà commutativa della somma).

S<sub>2</sub>.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (proprietà associativa della somma).

Grazie a questa proprietà si può fare a meno delle parentesi e scrivere  $a + b + c$ .

Infatti, sia che si calcoli prima  $a + b$  e poi a questo si sommi  $c$ , sia invece che si sommi  $a$  al risultato di  $b + c$ , il risultato finale è sempre lo stesso.

S<sub>3</sub>. Esiste un numero reale, che indichiamo con  $0$ , tale che  $a + 0 = 0 + a = a$ .

S<sub>4</sub>. Per ogni numero reale  $a$  esiste l'*opposto*, che indichiamo con  $-a$ , tale che  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

Per brevità, invece di  $a + (-b)$  si scrive di solito  $a - b$ .

La seconda operazione, il prodotto, gode delle proprietà seguenti:

P<sub>1</sub>.  $a \times b = b \times a$  (proprietà commutativa del prodotto).

P<sub>2</sub>.  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$  (proprietà associativa del prodotto). Anche qui dunque si può fare a meno delle parentesi e scrivere  $a \times b \times c$ .

P<sub>3</sub>. Esiste un numero reale diverso da  $0$ , che indichiamo con  $1$ , tale che  $1 \times a = a \times 1 = a$ .

P<sub>4</sub>. Per ogni numero reale  $a$  diverso da  $0$  esiste un inverso, che indichiamo con  $a^{-1}$ , tale che  $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ .

In genere invece di scrivere  $a \times b$  si scrive più semplicemente  $ab$ . Inoltre il prodotto  $ab^{-1}$  si scrive spesso  $\frac{a}{b}$ .

Oltre alla somma e al prodotto, in  $\mathbf{R}$  è definito un *ordinamento*, che si indica con  $\leq$  ( $a \leq b$  si legge “ $a$  minore o uguale di  $b$ ”), ed ha le seguenti proprietà:

O<sub>1</sub>.  $a \leq a$  (proprietà riflessiva).

O<sub>2</sub>. Se  $a \leq b$  e  $b \leq a$ , allora  $a = b$  (proprietà antisimmetrica).

O<sub>3</sub>. Se  $a \leq b$  e  $b \leq c$ , allora  $a \leq c$  (proprietà transitiva).

O<sub>4</sub>. Dati due numeri  $a$  e  $b$ , sussiste una almeno delle due relazioni  $a \leq b$  e  $b \leq a$  (ordinamento totale).

## Intervalli di $\mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

intervallo chiuso.

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

intervallo aperto.

$$[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

analoghi:

$$]a, +\infty[$$

$$]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$]-\infty, b].$$

A questo livello  $+\infty$  e  $-\infty$  sono simboli e non dei numeri reali.

es. Una sezione di  $\mathbb{R}$   $S = ]-\infty, 1]$   
 $D = ]1, +\infty[$ .

identifica il numero reale 1.

Def Dato  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto definiamo

(i)  $M \in \mathbb{R}$  è maggiorante per  $E$   
se  $\forall x \in E \Rightarrow x \leq M$ .

(ii)  $m \in \mathbb{R}$  è minorante per  $E$   
se  $\forall x \in E \Rightarrow m \leq x$ .

(iii)  $M \in \mathbb{R}$  è massimo per  $E$   
se  $M$  maggiorante e  $M \in E$

(iv)  $m \in \mathbb{R}$  è minimo per  $E$   
se  $m$  minorante e  $m \in E$

Esempio  $E = [0, 1[ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ .

2 è maggiorante  $x \leq 2 \quad \forall x \in E$ .

0 è minorante  $x \geq 0 \quad \forall x \in E$

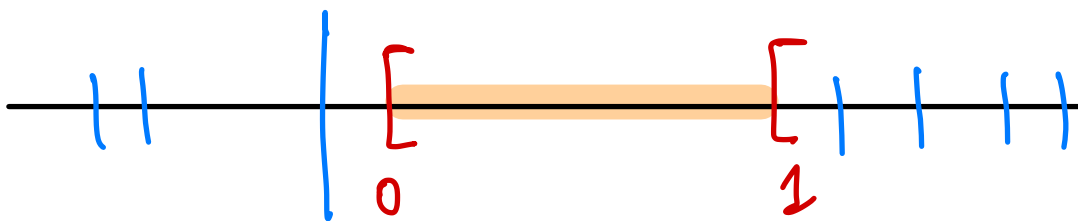
0 è minimo perché  $0 \in E$ .

1 è maggiorante ma  $1 \notin E$ .

Nota che preso  $y < 1$  arbitrario,  
allora  $y$  non è maggiorante perché

considero  $z = \frac{1+y}{2}$  e vale

$$y < \boxed{z} < 1 \quad \text{con } z \in E.$$



Prop Dato  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto. Se esiste un massimo per  $E$ , allora è unico.

dim Per assurdo siano  $\pi_1, \pi_2$  massimi per  $E$ . Allora si ha

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \text{ maggiorante} \\ \pi_2 \in E \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 \leq \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 \text{ maggiorante} \\ \pi_1 \in E \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 \leq \pi_2$$

ottengo una contraddizione.

Def (estremo superiore)

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto. Diciamo che  $\lambda \in \mathbb{R}$  è estremo superiore di  $E$

(e scriviamo  $\lambda = \sup E$ ) se vale:

$$(i) \quad \forall x \in E : x \leq \lambda \quad (\lambda \text{ maggiorante})$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in E : \lambda - \varepsilon < x$$

( $\lambda$  è il più piccolo dei maggior.).

$E$  superiormente limitato = ammette almeno un maggiorante.

Teorema Ogni  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e  
superiormente limitato ammette  
estremo superiore ed è unico.

dim Costruiamo una serie di  $\mathbb{R}$

ipotesi  $\Downarrow$   
 $S, D$  non vuoto

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ maggiorante di } E\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq y \quad \forall y \in E\} \\ S &= D^c = \mathbb{R} \setminus D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ non è magg di } E\} \end{aligned}$$

Per costruzione  $S \cup D = \mathbb{R}$  e  $D \cap S = \emptyset$

Per vedere che  $\bar{e}$  una serie deve

vedere:  $\forall s \in S, \forall d \in D \quad s \leq d$ .

D'altra parte presi due tali  $s, d$   
 $s$  non è magg  $\Rightarrow \exists x_0 \in E : s < x_0$   
 $d$  è magg  $\Rightarrow d \geq x_0 > s$

Per il principio di completezza esiste  
un unico elemento separatore  $\lambda \in \mathbb{R}$   
tale che  $\forall s \in S, \forall d \in D \quad s \leq \lambda \leq d$ .

Voglio vedere che  $\lambda = \sup E$  cioè  
(i)  $\lambda$  è maggiorante (cioè  $\lambda \in D$ )  
(ii)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \lambda - \varepsilon$  non è maggiorante

(noi  $\forall \varepsilon > 0 : \lambda - \varepsilon \in S$ )

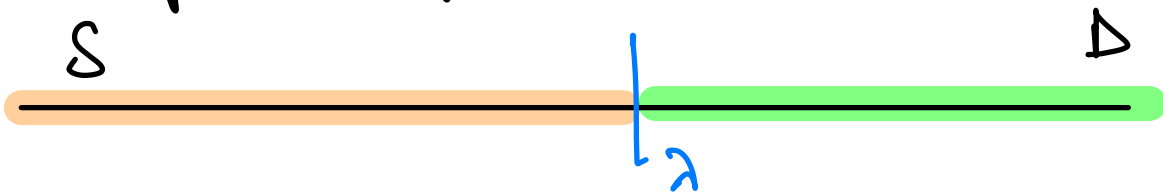
(i) Per assurdo supponiamo che  $\lambda$  non è maggiorante allora  
 $\exists x_0 \in E : \lambda < x_0$ .

Considero  $y = \frac{\lambda + x_0}{2}$ ; noto  $\lambda < y < x_0$

e vale che  $\begin{cases} y > \lambda \\ y \text{ non è maggiorante} \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda < y$  e  $y \in S$  contraddizione.

(ii) pensare per esercizio.



Def (estremo inferiore)

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto. Diciamo che

$\mu \in \mathbb{R}$  è estremo inferiore di  $E$

(e scriviamo  $\mu = \inf E$ ) se valgono

(i)  $\forall x \in E \quad \mu \leq x$  ( $\mu$  minorante)

(ii)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E : x < \mu + \varepsilon$  ( $\mu$  più grande dei minoranti)

Analogamente possiamo dimostrare che:

ogni  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e inferiormente limitato  
ammette estremo inferiore

↓  
ammette almeno  
un minorante

Esempio Sia  $E = \left\{ \frac{n^2 - 1}{3n^2} ; n \in \mathbb{N} \atop n \geq 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}$

Trovare, se esistono,  $\inf$ ,  $\sup$ ,  $\max$ ,  $\min$ .

Se chiamo  $a_n = \frac{n^2 - 1}{3n^2}$  ;  $a_1 = 0$

$$a_2 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{8}{27}$$

Osservo che  $0 \in E$  e  $\forall n \geq 1 \quad \frac{n^2 - 1}{3n^2} \geq 0$

quindi 0 è minorante ;  $0 \in E \Rightarrow \min E = 0$

0 è anche l'estremo inferiore.

Osservo che  $n^2 - 1 \leq 3n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 $\Leftrightarrow -1 \leq 2n^2$  sempre vero.

Quindi  $0 \leq \frac{n^2 - 1}{3n^2} \leq 1$  1 maggiorante.

Nota  $\frac{n^2-1}{3n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^2} \leq \frac{1}{3}$

anche  $1/3$  è maggiorante.

Vediamo che  $\lambda = \sup E = \frac{1}{3}$  cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \frac{1}{3} - \varepsilon < \frac{n_0^2 - 1}{3n_0^2} .$$

equivalente a dire che la disequazione

$$\frac{1}{3} - \varepsilon < \frac{n^2 - 1}{3n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^2} \quad (*)$$

ha almeno una soluzione  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \varepsilon < \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^2}$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{3n^2}$$

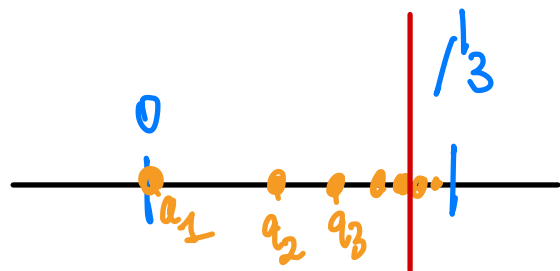
$$\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{3n^2}$$

$$\Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{3\varepsilon}$$

$n \in \mathbb{N}$   
 $n > 0$ .

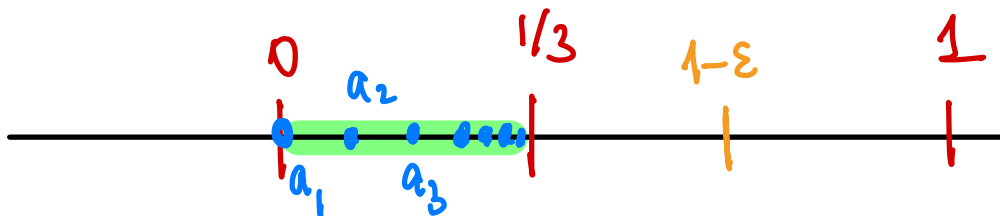
$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}}$$

nota  $\varepsilon > 0$   
 $n^2 > 0$ .



Per esercizio: verificare che  $1 \neq \sup E$ .

cioè non è vero  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : 1 - \varepsilon < \frac{n^2 - 1}{3n^2}$ .



Esercizio ① Se  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto ammette  
estremo superiore  $\lambda = \sup E$ ,  $\lambda \in E$   
allora  $\lambda = \max E$ .

② Se  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto ammette  
massimo allora  $\sup E = \max E$ .

③ Se  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto ammette  
estremo superiore, esso  $\bar{x}$  unico.

Esempio Sia  $E = ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$ .  
 $= \{ q \in \mathbb{Q} : 0 < q < 1 \}$

$$0 = \inf E = ?$$

$$1 = \sup E = ?$$

$$\text{non es. } \max E = ?$$

$$\text{non es. } \min E = ?$$

$\forall \varepsilon > 0$   $1 - \varepsilon$  non  $\bar{x}$  magg.

$\forall \varepsilon > 0 \exists q \in E$   $1 - \varepsilon < q$ .

basta scegliere  $q = \frac{n-1}{n}$   
con  $n$  grande.

Esempio  $E = \left\{ \frac{m}{m} + \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$

$$\inf E = \min E = 2$$

$$\frac{m}{m} + \frac{m}{n} = \frac{n^2 + m^2}{mn}$$

se  $n=m=1 \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2, \quad 2 \in E.$

Per vedere che 2 è minimo

$$\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \geq 2 \quad ?$$

$$(\Rightarrow) \frac{n^2 + m^2}{mn} \geq 2 \quad (\Rightarrow) \quad n^2 + m^2 \geq 2nm$$

$$(\Rightarrow) \quad n^2 - 2nm + m^2 \geq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \underline{(n-m)^2 \geq 0} \quad \text{vero!}$$

Fisso  $m=1$  allora  $\frac{n}{1} + \frac{1}{n} \in E$

ovvero  $n + \frac{1}{n} \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

---

$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad x \leq M.$  }  $M$  è magg.

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in E : M < x$  }  $M$  non è magg.



$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in E : n < x.$

Usiamo la seguente terminologia

def Dato  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto

- superiormente (risp. inferiormente) limitato  
se  $E$  ammette almeno un  
maggiorante (risp. minorante)
- limitato sia sup che inf. limitato

Se  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto non è sup. limitato  
allora poniamo  $\sup E = +\infty$

(risp.  $\inf E = -\infty$  se non è inf. limitato).

Esercizio Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e limitato  
Provare che  $\inf E \leq \sup E$ .

## POTENZA DEL BINOMIO

Formula del quadrato del binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cubo del binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Teorema (potenza del binomio)

Per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ , e per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} a^k b^{n-k}$$

coefficiente binomiale

per  $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

$0! = 1$  per conv.

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

lemma vale la seguente identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e ogni  $k : 0 \leq k \leq n+1$ .

dim Basta vedere che

$$\frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! (n-k+1)!}$$

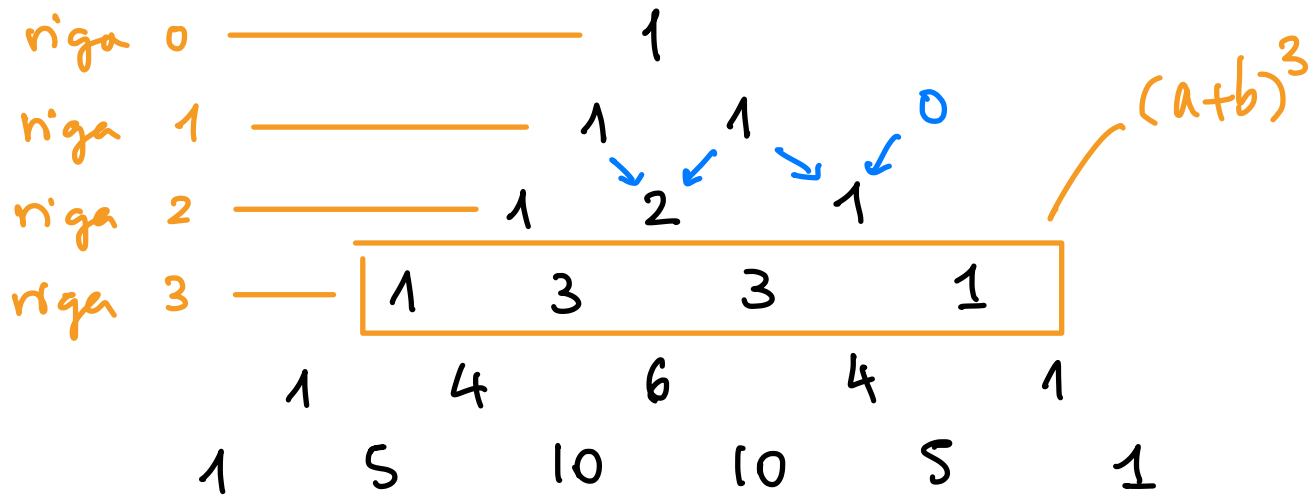
parto da qui  
uso  $k! = k \cdot (k-1)!$

$$= \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} \left[ \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right]$$

$$= \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} \left[ \frac{n - \cancel{k} + 1 + \cancel{k}}{k (n-k+1)} \right]$$

$$= \frac{(n+1)!}{k! (n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

Gravie a questa formula ricorsiva  
possiamo ricostruire i valori del coeff  
binomiale dal Triangolo di Tartaglia



$\binom{n}{k}$  = k-esimo della riga n.

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

dim della formula

Per  $n=1$  abbiamo visto che è vera.

Suppongo  $P(n)$  vera. Voglio vedere che  
è vera anche  $P(n+1)$ .

Voglio cioè dimostrare

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

uso l'identità

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$$

$P(n)$  vera  $\rightarrow$   $= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) (a+b)$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

nota: ho usato  $c \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n c a_k$

infatti  $c(a_0 + a_1 + \dots + a_n) = ca_0 + ca_1 + \dots + ca_n$

Osservo: 
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n X_k &= X_0 + X_1 + \dots + X_n \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} X_{k-1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

= termi (n+1) 1<sup>a</sup> som + term 0 2<sup>a</sup> somma

$$+ \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1}$$

VENNA!

$$= \overset{1}{=} \binom{n}{n} a^{n+1} b^{\overset{1}{0}} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$$

## IL VALORE ASSOLUTO

def Dato  $x \in \mathbb{R}$  definiamo

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ne segue  $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

Ad esempio  $|3| = 3$  ,  $|-4| = 4$

$$|2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 \quad |e^\pi - \pi^e| = ?$$

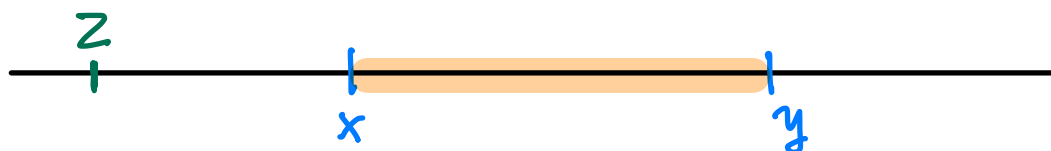
Osservo inoltre  $|x| \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
 $|x| \geq -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Proposizione (disuguaglianza triangolare)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  vale  $|x + y| \leq |x| + |y|$

È chiamata con questo nome perché

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{distanza tra } x \text{ e } y.$$



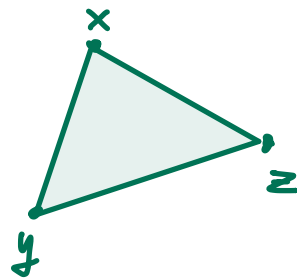
Dati  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y|$$

$$= |(x - z) + (z - y)|$$

$$\stackrel{\text{uno}}{(A+B) \leq |A| + |B|} \leq |x - z| + |z - y|$$

$$= d(x, z) + d(z, y)$$



$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

dim (della dis. triangolare)

Per definizione  $x \leq |x|$ ,  $y \leq |y|$

allora  $x + y \leq |x| + |y|$

D'altra parte  $-x \leq |x|$ ,  $-y \leq |y|$

quindi  $-(x + y) \leq |x| + |y|$

Ne segue  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

$\max\{x+y, -(x+y)\}$ .

Conseguenza Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

ovvero

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

dim Per induzione. Per  $n=2$  vera

Mostriamo che  $P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \geq 2$ .

In fatto primo vero  $P(n)$  e osservo.

$$|(x_1 + \dots + x_n) + x_{n+1}| \quad \text{uso la dis. triangolare}$$

$$\leq |x_1 + \dots + x_n| + |x_{n+1}|$$

$$\text{uso } P(n) \text{ vera.} \quad \leq |x_1| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}|.$$

Esempi ① Risolvere in  $\mathbb{R}$

$$|x-3| < 2x+1. \quad (*)$$

$$\text{se } x-3 \geq 0 \Rightarrow [x-3 < 2x+1 \Leftrightarrow (*)]$$

$$x-3 < 0 \Rightarrow [3-x < 2x+1 \Leftrightarrow (*)]$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 < 2x+1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x-3 < 0 \\ 3-x < 2x+1 \end{cases}.$$

② Risolvere in  $\mathbb{R}$

$$|x-1| \leq 3|x+1|.$$

$$\text{equiv.} \quad (x-1)^2 \leq 9(x+1)^2.$$

per  $A, B > 0$

$$A \leq B$$

$$\Leftrightarrow$$

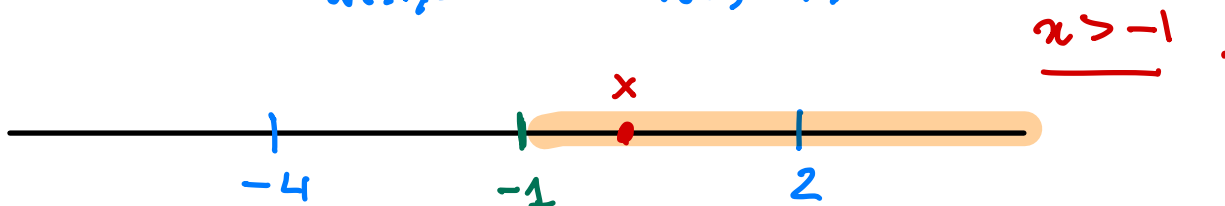
$$A^2 \leq B^2$$

3

Risolvere in  $\mathbb{R}$

$$|x-2| < |x+4|$$

$$d(x, 2) < d(x, -4)$$



## PUNTI DI ACCUMULAZIONE

idea: un pto di accumulazione per  $E \subseteq \mathbb{R}$   
 è un  $x_0 \in \mathbb{R}$  a cui posso "avvicinarmi"  
 rimanendo in  $E$ .

notazione  $I(x_0, r) = B(x_0, r)$

intervallo (palla)  
 aperto  
 centrato in  $x_0$   
 di raggio  $r > 0$ .

$r > 0$   
 $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

$$\text{noi siamo } |x - x_0| < r$$

$$\Leftrightarrow -r < x - x_0 < r$$

$$\Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r$$

$$\text{ovvero } I(x_0, r) = ]x_0 - r, x_0 + r[$$

def Dato  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  si  
 dice pto di accumulazione per  $E$  se

$$\forall r > 0 \quad E \cap (I(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

in ogni intorno di  $x_0$  trova punti di  $E$  diversi da  $x_0$ .

❗ Tolgo  $x_0$  dall' intorno perché altrimenti se  $x_0 \in E$  la condizione  $E \cap I(x_0, r) \neq \emptyset \quad \forall r > 0$  è automaticamente verificata.

Oss  $x_0$  non è pto di accumulazione

$$\exists r_0 > 0 : E \cap (I(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}) = \emptyset$$

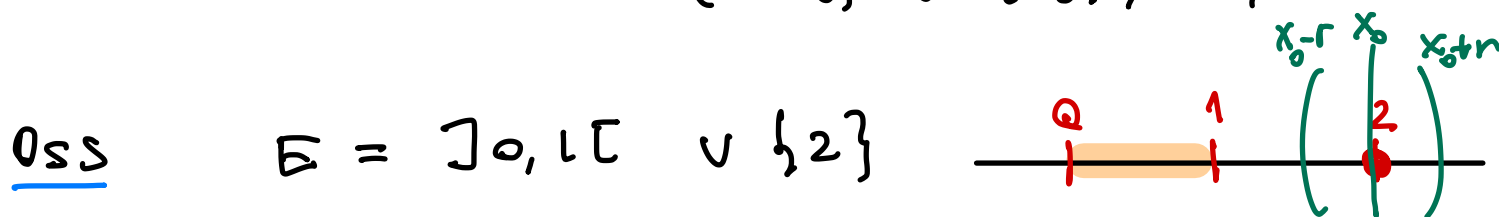
Esempio  $E = ]0, 1[$ .



Ogni  $x_0 \in ]0, 1[$  chiuso è di accumulazione.

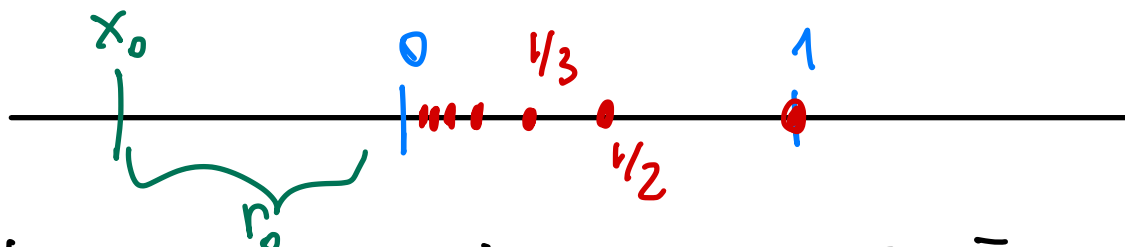
Per  $x_0 \notin ]0, 1[$ , ovvero  $x_0 \in ]1, +\infty[$   
non sono di acc.  $x_0 \in ]-\infty, 0[$ .

Per  $x_0 > 1$  basta prendere  $r_0 < |x_0 - 1|$   
e avremo  $E \cap (I(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}) = \emptyset$



il punto  $x_0 = 2$  non è di accumulazione

Esempio  $E = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$   
 $= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$



L'unico pto di acc di  $E$  è  $x_0 = 0$ .

Vediamo che  $x_0 = 0$  è di accumulazione.

$$\begin{aligned} E \cap (I(0, r) \setminus \{0\}) &= E \cap (]-r, r[ \setminus \{0\}) \\ &= \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, -r < \frac{1}{n} < r, \frac{1}{n} \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < r \right\}. \\ &= \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{r} \right\}. \end{aligned}$$

sempre  
non vuoto!.

Se  $x_0 < 0$  o  $x_0 > 1$  non è di acc. (facile!)

Sia ora  $x_0 \in ]0, 1[$ , voglio vedere che non è di acc. Ho due possibilità

(i)  $x_0 = \frac{1}{n_0}$  per qualche  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \frac{1}{n_0+1} < x_0 < \frac{1}{n_0}$

Nel caso (i) se prendo  $r_0$  come segue

$$r_0 < \left| \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1} \right| = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1}.$$

allora

$$I(x_0, r_0) \cap E = \{x_0\}$$

$x_0 \in E$ .

quindi non è di acc.

Nel caso (ii) devo scegliere

$$r_0 < \min \left\{ \left| x_0 - \frac{1}{n_0} \right|, \left| x_0 - \frac{1}{n_0+1} \right| \right\}.$$

in questo caso

$$E \cap I(x_0, r_0) = \emptyset$$

Oss (nella definizione)

possiamo caratterizzare in maniera equivalente un pto di accumulazione come segue:  $x_0 \in \mathbb{R}$  è di acc. per  $E$

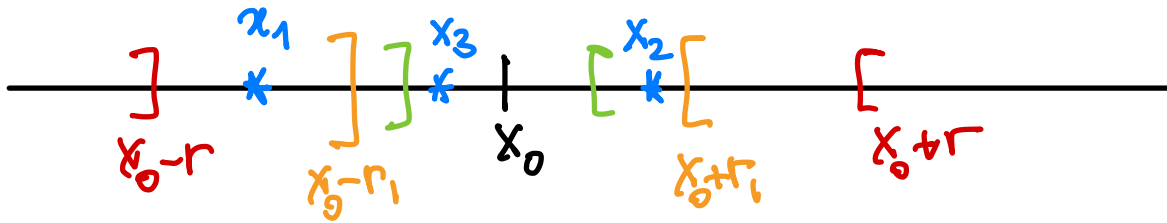
se

$$\forall r > 0 \quad E \cap I(x_0, r) \text{ è infinito} \quad (D1)$$

$$\forall r > 0 \quad E \cap I(x_0, r) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \quad (D2)$$

Evidente che  $(D1) \Rightarrow (D2)$

Mostriamo che se vale (D2)  $\Rightarrow$  (P1) vera.



Fisso  $r > 0 \Rightarrow \exists x_1 \in E \cap I(x_0, r)$ ,  $x_1 \neq x_0$ .

Sia  $r_1 < |x_0 - x_1| \Rightarrow \exists x_2 \in E \cap I(x_0, r_1)$ ,  $x_2 \neq x_0$   
 $x_2 \neq x_1$ .

Sia  $r_2 < |x_0 - x_2| \Rightarrow \dots$

Costruisco  $x_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ .

$x_n \neq x_0$ ,  $x_n \in I(x_0, r)$ .

Corollario Ogni insieme  $E$  finito  
 non ha pi di accumulazione.

Osservazione  $\mathbb{N}$  non ha pi di accumulazione  
 benché sia infinito.



Domanda: Quali sono i pi di  
 accumulazione di  $\mathbb{Q}$ ?

Proposizione (densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ )

Dati  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , esiste  $q \in \mathbb{Q}$   
tale che  $a < q < b$ .

(Equivale a dire  $\exists a, b \in \mathbb{Q} \neq \emptyset \quad \forall a < b$ ).

Usiamo la proprietà archimedeica di  $\mathbb{R}$

$$\forall r > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : nr > 1.$$

dim Basta farlo per  $0 < a < b$ .

Essendo  $b - a > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} :$

$$k(b - a) > 1$$

Fisso  $m \in \mathbb{N}$   $n := [ka] + 1$

dove  $[x] = \max \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \}$

$$[\pi] = 3 \quad [-\pi] = -4.$$

Osservo  $ka < [ka] + 1 \leq ka + 1 < kb$

$$\Rightarrow ka < n < kb \Rightarrow a < \frac{n}{k} < b.$$

Esercizio  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  denso in  $\mathbb{R}$

(usare che  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ).

Ovvero pti di acc di  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ .

Esercizio Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  limitato. Poniamo

$$\text{diam } E = \sup \{ |x - y|, x, y \in E \}.$$

Dimostrare che  $\text{diam } E = \sup E - \inf E$ .



Esercizio  $E = \left\{ \frac{n-m}{nm} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$

Quali sono  $\inf$ ,  $\sup$ , pti accumulazione?

$$\frac{n-m}{nm} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \quad \begin{array}{l} \inf -1 \\ \sup 1 \end{array}$$

$$-1 \leq -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \leq 1 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

quindi  $E \subseteq [-1, 1]$  ed  $E$  quindi limitato.

Dunque  $\exists \sup E, \inf E$ .