

1 INTRODUZIONE, INSIEMI

Insieme = "collezione di oggetti / elementi"

A insieme, a elemento

$a \in A$ a appartiene ad A

$a \notin A$ a non appartiene ad A

$A = \{1, 4, 7\}$ ← descr. per eleuncarione.
 $1 \in A, 2 \notin A$

esempi: insiemi numerici $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ naturali

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ interi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ razionali

↑ tale che

↑ $\{x \in X \mid P(x) \text{ vera}\}$

$\{x \in X \mid P(x)\}$

es. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4 = 0\} = \{-2, +2\}$

$\mathbb{R}$ numeri reali

$m, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$m \in \mathbb{Z} \quad a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$

raz.

irraz.

PROPRIO

$\left\{ \begin{array}{l} \text{finita} \\ \text{inf. periodica} \end{array} \right.$

$\hookrightarrow$ espr. decimale infinita non periodica.

$$\sqrt{2} = 1,414 \dots$$

$$P = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \frac{m}{2} \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{pari}$$

$$B = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid 2m+1 \in P \right\} \rightarrow \text{nessun elemento} \\ = \emptyset \quad \text{insieme vuoto.}$$

Oss. $a \neq \{a\} \rightarrow$ singoletto

Esercizio $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - |x| + 1 \geq 0 \right\}$



$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{array} \right.$

int.

opp.

int.

$\left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x^2 + x + 1 \geq 0 \end{array} \right.$

int.

OPERATIONI TRA INSIEMI

Dati A, B insiemi, $A, B \subseteq X$

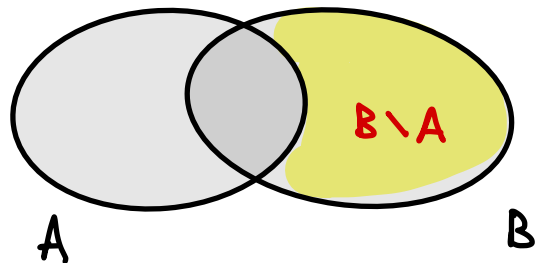
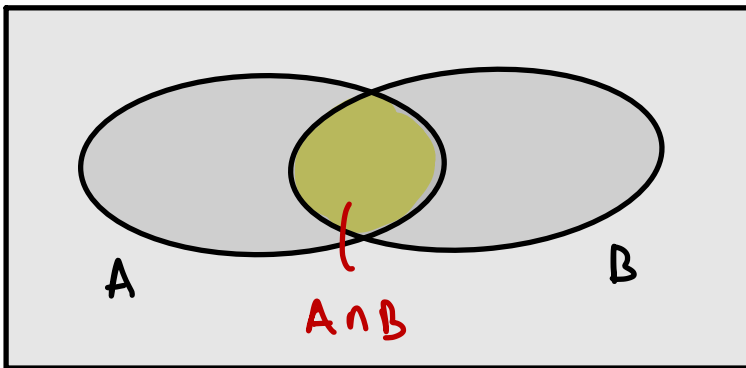
insieme universo.

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$B \setminus A = \{x \in X \mid x \in B \text{ e } x \notin A\} = B \cap A^c$$

dove $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$



Alcune proprietà:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$A \cup B \cup C$

commutativa

associativa

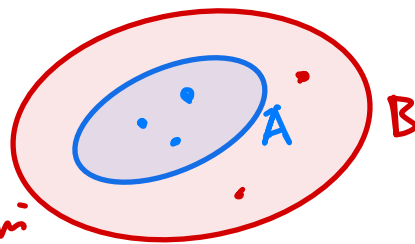
$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap B)$$

$$E \cup (A \cap B) = (E \cup A) \cap (E \cup B)$$

} distributiva.

Sottoinsiemi

Dati A, B insiemi



$$A \subseteq B$$

incluso

def
($\Rightarrow$)

se e solo se

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

allora

$$A \not\subseteq B$$

($\Rightarrow$)

$$\exists x \in A : x \notin B$$

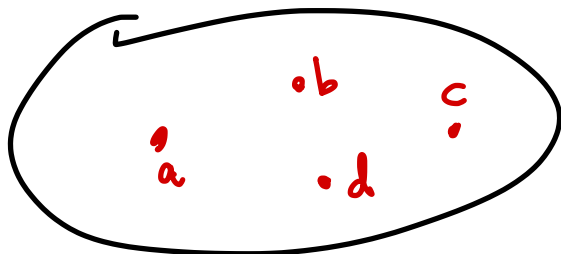
esiste.

talmente
(come 1)

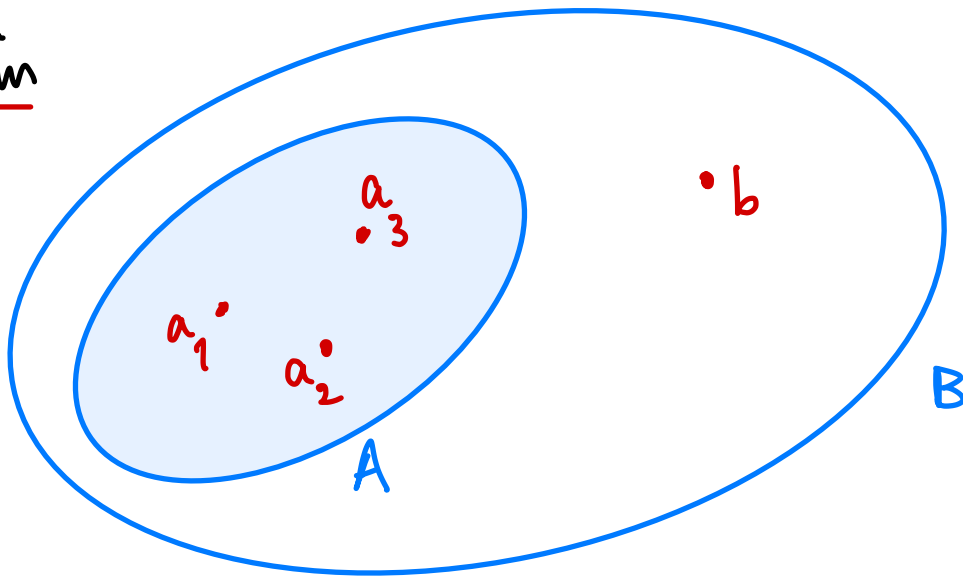
Dato A insieme. $A \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$.
per ogni A .

Teorema Dato $n \in \mathbb{N}$. Un insieme con n elementi possiede 2^n sottoinsiemi.

es. $A = \{1, 2\}$ sott. $\emptyset$ $\{1\}$ $\{2\}$ A



dim



aggiungendo un elemento il numero dei sottoinsiemi raddoppia.

$$\{ \text{sottoinsi } B \} = \{ \text{contengono } b \} \cup \{ \text{non cont. } b \}.$$

↓ Sott A
↓ Sott A

$$\text{numero sott } B = 2 \cdot \text{numero sott. } A.$$

$C(n)$ = numero dei sottoinsiemi di
in insieme con n elementi

$$C(n+1) = 2 \cdot C(n)$$

$$C(1) = 2$$

vorremmo dedurre $C(n) = 2^n$

sapendo anche che $C(1) = 2$.

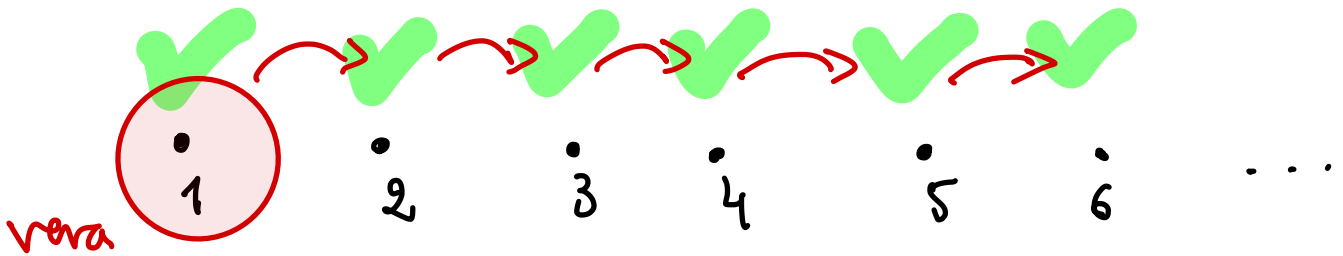
PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $P(n)$ una proposizione che dipende da un numero $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo

-) $P(1)$ è vera (inizializzazione)
-) $P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (passo induttivo)

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

Esempio: $P(n) \quad 2^n \geq n+1$



Esempio (Somma dei primi n dispari)

1	1
1 + 3	4
1 + 3 + 5	9
1 + 3 + 5 + 7	16

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

⊙ $P(1)$ è vera : $1 = 1^2$

② se vale $P(n)$ allora vale $P(n+1)$

ipotesi $P(n)$

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

e vedere se vero

$P(n+1)$

$$1 + 3 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$$

Possiamo scrivere

$$[1 + 3 + \dots + (2n-1)] + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Esempio (somma dei primi n naturali)

$P(n)$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

vera

$P(1)$ è vera

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad \text{ok.}$$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

$$P(n+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

non lo so.

Oppure che

$$[1 + 2 + 3 + \dots + n] + (n+1)$$

$$\begin{aligned} \text{mo } P(n) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{OSS } S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 1$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101$$

$$2S = 101 \cdot 100 \Rightarrow S = \frac{101 \cdot 100}{2}$$

Esempio (attenzione!)

Considero questa situazione

$P(n)$ $2n+1$ è pari

$P(n)$ è evidentemente falsa $\forall n \in \mathbb{N}$!

Tuttavia $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$!

se ipotizzo $P(n) \Rightarrow 2n+1 = 2k$

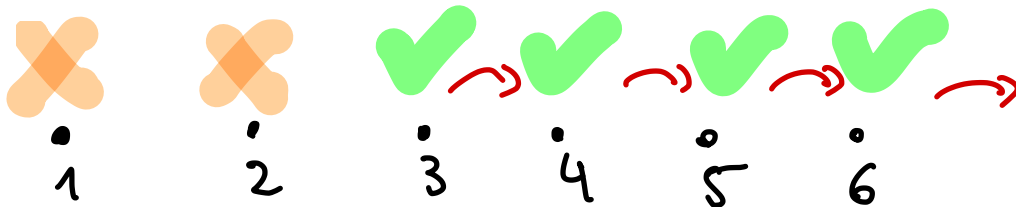
per un certo $k \in \mathbb{N}$.

$P(n+1)$ $2(n+1)+1$ è pari

così $2n+3$ è pari

$$\text{ma } 2n+3 = \underbrace{2n+1}_{P(n)} + 2 = 2k+2 = 2(k+1).$$

Varianti del principio di induzione



se so che $P(n_0)$ è vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$
 $P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \geq n_0$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$.

Esempio Vediamo che

$$P(n): 2^n \geq n+3 \quad \forall n \geq 3.$$

in effetti posso notare

$$P(1) \quad 2^1 \geq 1+3 \quad \text{Falso}$$

$$P(2) \quad 2^2 \geq 2+3 \quad \text{Falso}$$

$$P(3) \quad 2^3 = 8 \geq 3+3 \quad \text{vero} \quad n_0 = 3$$

$P(n_0)$ è vera!

Voglio dimostrare che $P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \geq 3$

So che $P(n)$ è vera $2^n \geq n+3$ (*) ✓
Voglio dimostrare $2^{n+1} \geq (n+1)+3 = n+4$?

$$\begin{aligned} \text{ma} \quad 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \geq 2(n+3) \\ &\geq 2n+6 \geq n+4 \end{aligned}$$

↑
avrei potuto usare
che $n \geq 3$
ma non è servito.

Esercizi

1.17. Dimostrare per induzione le formule seguenti:

1. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

3. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \dots + n)^2$

5. $2^n \geq n+1$

6. $3^n \geq n^2 + 1$

7. $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (a \neq 1)$

8. $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

9. $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n+1) = (2n+1)(n+1)$

Esercizi

1.14. Scrivere in maniera formale le seguenti proposizioni:

1. Esiste un numero naturale maggiore di 3.
2. Il quadrato di un numero naturale è maggiore del numero.
3. Esiste un numero reale più piccolo del suo cubo.
4. Esiste un numero naturale maggiore di tutti gli altri.
5. Ogni numero intero (positivo, negativo o nullo) è differenza di due numeri naturali.
6. Ogni numero reale è somma di due numeri razionali.
7. La sola soluzione reale dell'equazione $x + 3 = 0$ è -3 .
8. Il quadrato di un qualsiasi numero razionale è razionale.
9. Il quadrato di un qualsiasi numero irrazionale è irrazionale.
10. Il quadrato di qualche numero irrazionale è irrazionale.
11. Il quadrato di qualche numero irrazionale è razionale.
12. La radice cubica di un numero naturale è irrazionale.
13. Se $x^2 > 1$ allora $x > 1$.
14. Se $x > 1$ allora $x^2 > 1$.

1.15. Dire se le proposizioni precedenti sono vere o false.

1.16. Negare le proposizioni dell'esercizio 1.14.

1. $\exists n \in \mathbb{N} : n > 3$

neg. $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 3$

3. $\exists x \in \mathbb{R} : x < x^3$

per sapere se è vera $x^3 - x > 0$

$$x(x^2 - 1) > 0$$

$$x(x-1)(x+1) > 0$$