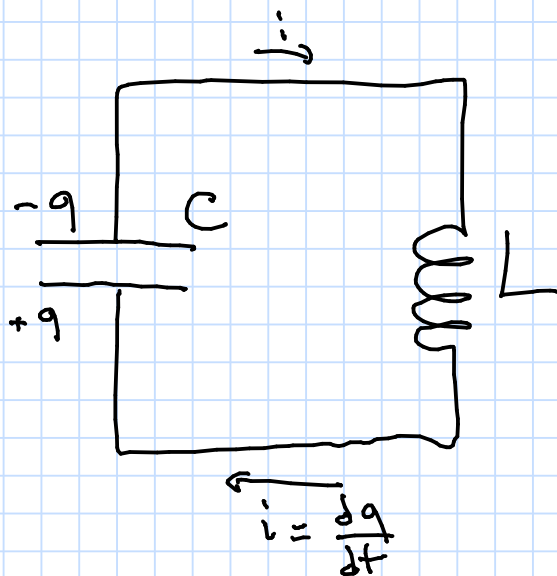


- LC
- RLC $\left\{ \begin{array}{l} \text{libero} \\ \text{forzato} \end{array} \right.$
- risonanza

Circuito LC (serie)

non c'è resistenza R , è idealizzazione
 $\Rightarrow$ non dissipa

$$t=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0 \text{ su } C \\ i = 0 \end{array} \right.$$



$t > 0$ q inizia a scendere

Kirchhoff $\mathcal{E}_i = V_C$

$$-L \frac{di}{dt} = \frac{q}{C}$$

$$-L \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

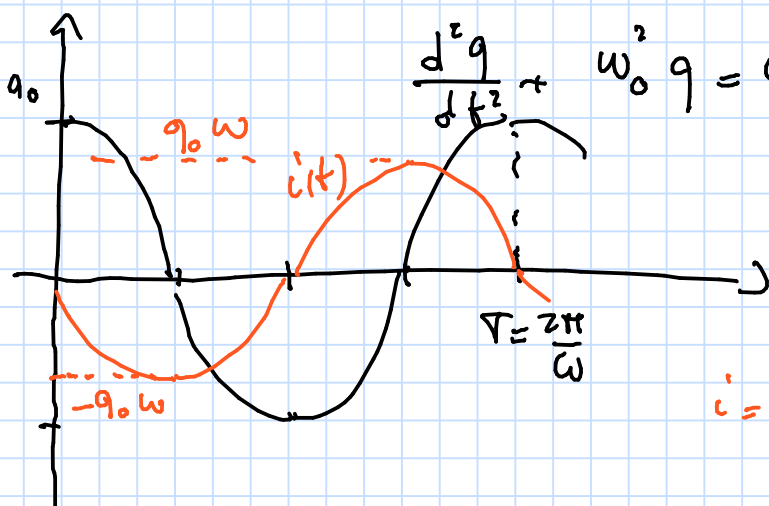
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t)$$

oscill. arm.

ω_0 = pulsazione propria

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



$$i = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

non dissipa: energia totale si conserva

ini. $U_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$ $t=0$

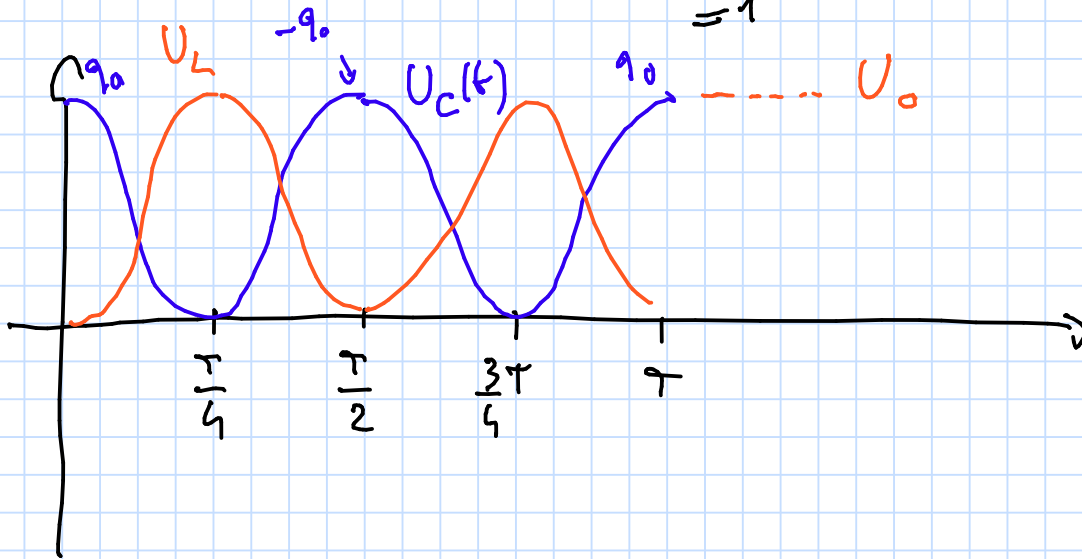
$t > 0$ $U_C = \frac{1}{2} \frac{q(t)^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} \cos^2(\omega_0 t)$

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} q_0^2 \omega_0^2 L \sin^2(\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2} q_0^2 \frac{1}{\Delta C} \Delta \sin^2()$$

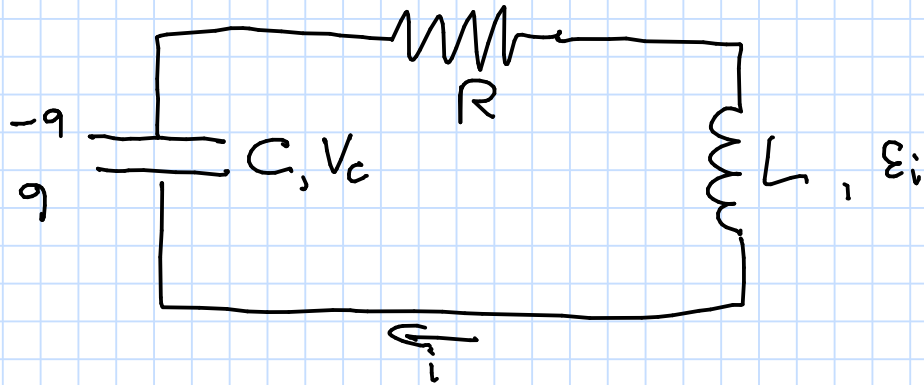
stesso
prefattore

$$U_C + U_L = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} (\underbrace{\cos^2 \dots + \sin^2 \dots}_{=1}) = U_0$$



Circuito RLC non forzato

- R smorza le oscillazioni dell'LC (R piccola)
- R grande : oscillaz. non ci sono



$$\mathcal{E}_i = V_c + R i$$

$$-L \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}$$

(deriv. risp temps, $-\frac{1}{L}$)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{1}{LC} i - \frac{R}{L} \frac{di}{dt}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega_0^2 i - 2\gamma \frac{di}{dt}$$

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ 2\gamma = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau_L R} \end{cases}$$

acceleraz.

forza
di richiamo
(elastica)

attrito
viscoso

L

C

R

soluz: $i(t) = A e^{+\alpha_1 t} + B e^{+\alpha_2 t}$

α_1, α_2 sol. eq. caratteristica $\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

3 casi: $(\tau_{RC} \gg 4 \tau_{LR})$

1) $\gamma > \omega_0 \Leftrightarrow R^2 > \frac{4L}{C}$ smorzamento forte

α_1 e α_2 reali negative, due decad. esp.

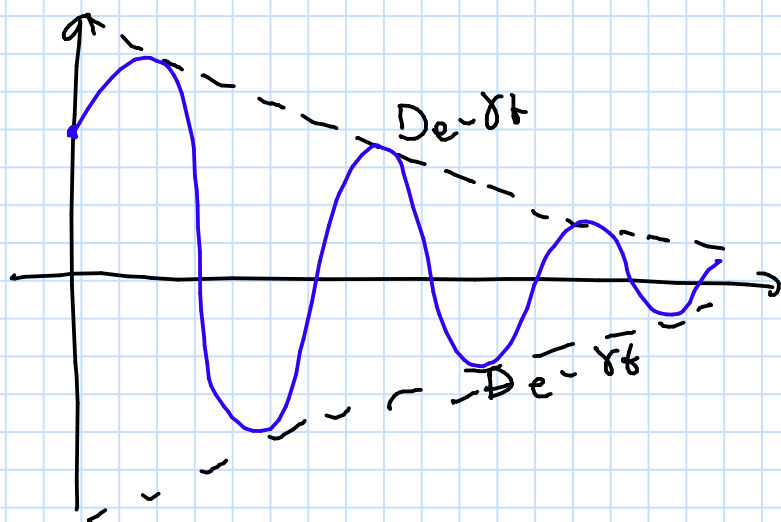
2) $\gamma = \omega_0$ caso critico

$\alpha_1 = -\gamma = \alpha_2$ $i(t) = e^{-\gamma t} (A + tB)$

3) $\gamma < \omega_0$ smorzamento debole

α_1, α_2 complessi

$i(t) = D e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$



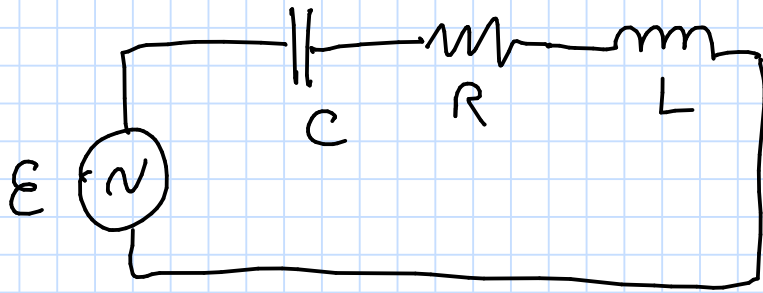
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\approx \omega_0$ se $\gamma \ll \omega_0$

le costanti (A, B) (D, φ) da determinare da cond. iniziali

resistenza critica $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ da $\gamma^2 = \omega_0^2$

RLC forzato e risonanza



$$\textcircled{a} \quad \mathcal{E} + \mathcal{E}_i = V_C + R i$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

ω, φ parametri esterni

$$\textcircled{a} \quad \frac{1}{L} \frac{d^2 i}{dt^2} \dots$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\gamma \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = -\frac{\mathcal{E}_0 \omega}{L} \sin(\omega t + \varphi)$$

sol. = somma $\left\{ \begin{array}{l} \text{sol. omogenee (decadimento)} \\ \text{sol. particolare } \diamond i = i_0 \cos(\omega t) \end{array} \right.$

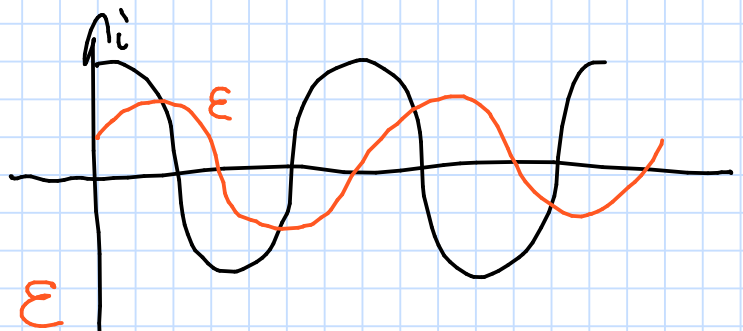
funziona

$$\left\{ \begin{array}{l} i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\ \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{array} \right.$$

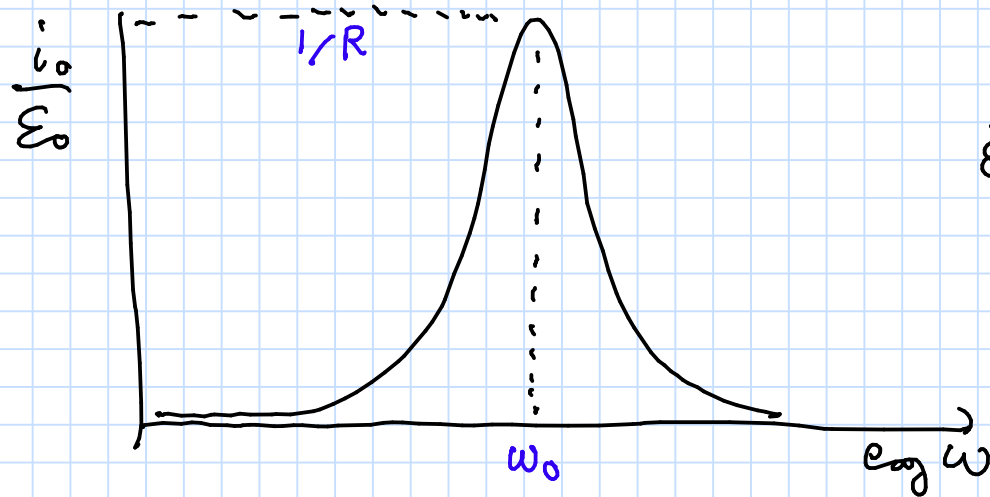
per tempi lunghi, oscillazioni periodiche di i stessa ω del generatore, sfasamento φ

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i = i_0 \cos(\omega t)$$

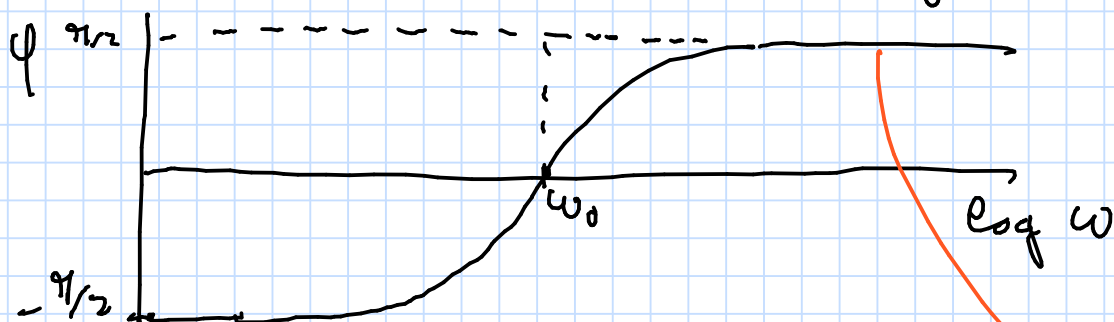


i : sfasamento $-\varphi$ risp $\mathcal{E}$



$$\frac{i_o}{E_o} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

nessuno
per
 $\omega = \omega_0$



ω_{base} : q e E in fase
 L è poco rilevante

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{spinta di}$$

$$-\phi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{risp } E$$

ω_{alt} : nell'eq.
conta L

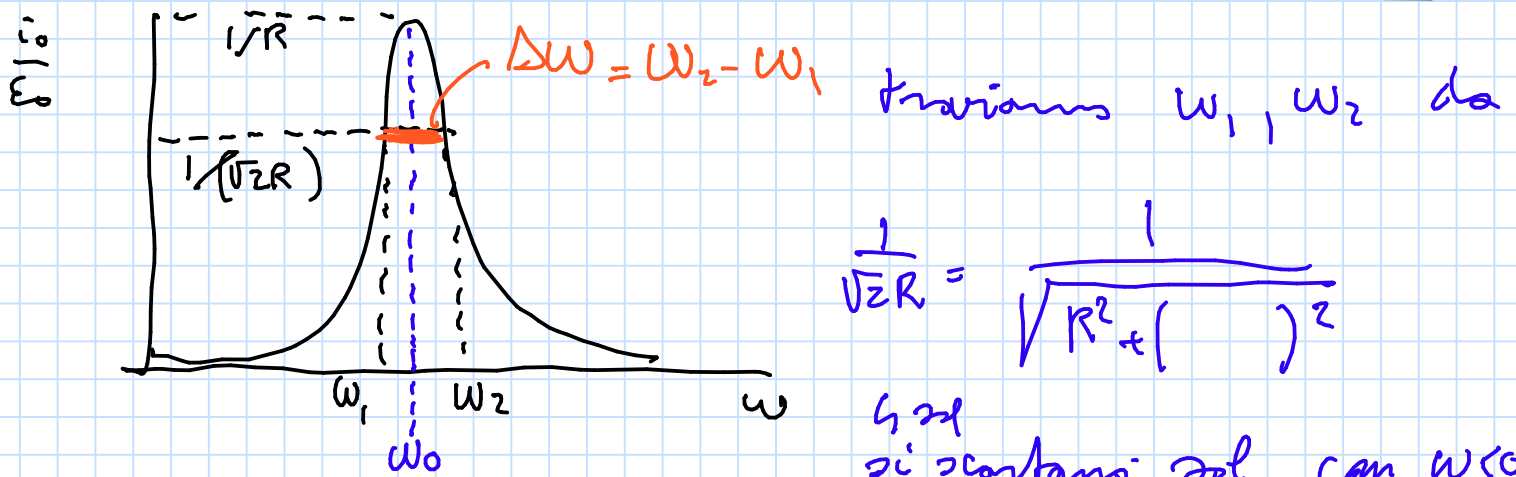
$$L \frac{dq^2}{dt^2} \simeq E$$

q sfasata di π
risp. E

$\Rightarrow i$ sfasata di
 $-\phi = -\frac{\pi}{2}$ risp E

Il rapporto tra output (i_o) e input (E_o) è massimo quando si guida il sistema alla frequenza a cui oscillerebbe naturalmente (senza R)

Risonanza e fattore di merito



$$\frac{1}{\sqrt{2}R} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\quad)^2}}$$

si scartano sol. con $\omega < 0$

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_2 = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} = +\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}$$

sono centrate su $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2} > \omega_0$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = 2\gamma$$

più γ hanno più risonanza e "buoni"

fattore di merito

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

indica quanto sono persistenti le oscillazioni

es) $Q = 10^6$

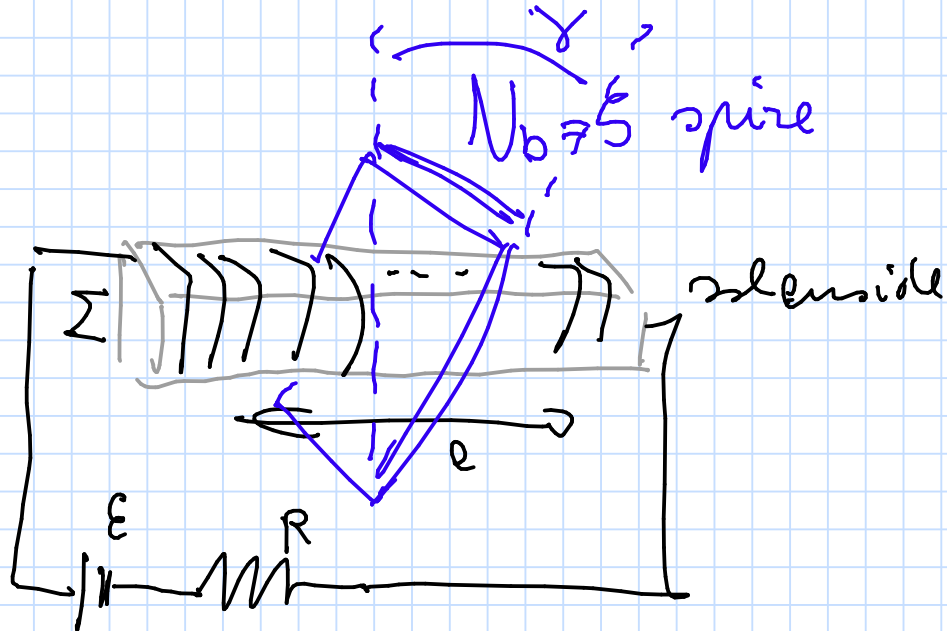
$$\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$$

$$\Delta\omega = 2\gamma = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{10^6} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \gamma \approx 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \tau \approx 10^6 \text{ s}$$

esercizio

circuito LR



$$\varepsilon = 0.2V$$

$$R = 0.1\Omega$$

$$L \text{ ideale}, U_m = 40 \mu J \quad \Sigma = 6 \text{ cm}^2 \quad l = 8 \text{ cm}$$

1) $N = ?$ n° spire

$$L = \mu_0 n^2 L \Sigma \quad \text{a regime} \quad i = \frac{\varepsilon}{R} = 2A$$

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma l i^2 \Rightarrow n = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2 U_m}{\mu_0 \Sigma l}} = 288 \text{ spire/m}$$

$$N = n l = 23$$

$$\left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \Sigma l$$

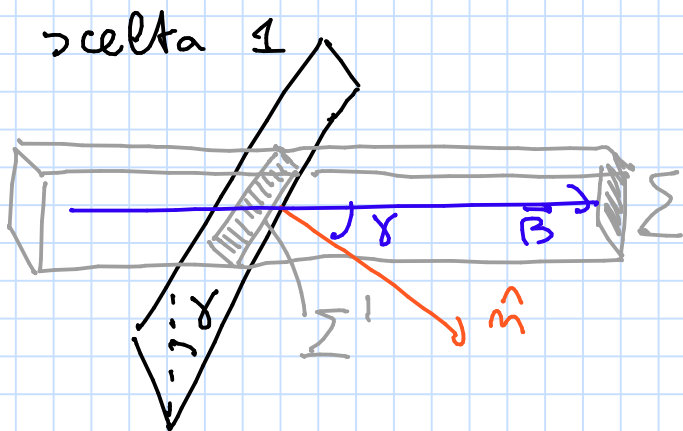
(dens. ene) (volume)

2) $N_b = 5 \quad \Sigma_b = 22 \text{ cm}^2 \quad \text{angolo } \gamma = 20^\circ$

coeff. di mutua induzione?

$$\Phi_B = (\mu_0 n i) \Sigma N_b = \underbrace{(\mu_0 n \Sigma N_b)}_{M = 1.09 \mu H} i$$

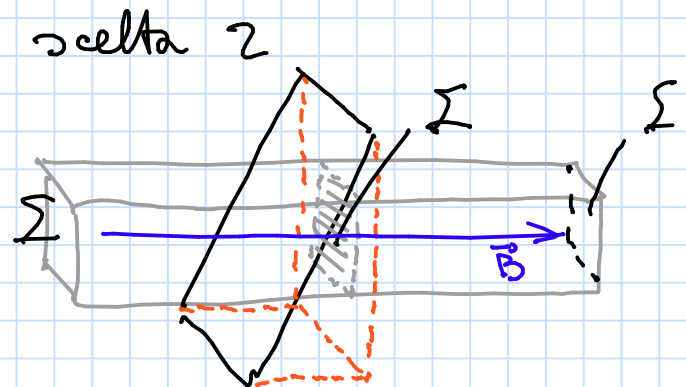
perché $\Phi_B = B \Sigma$ anche se bobina è inclinata?
 $\uparrow$ del solen. $\uparrow$ sup. del solenoide



scegliamo una superficie
 piatta nelle spire, di
 cui una parte Σ' è
 attraversata da B

$$\Sigma \rightarrow \Sigma' = \frac{\Sigma}{\cos \gamma}$$

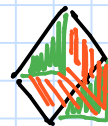
$$\begin{aligned} \Phi_B^{\text{spira}}(\Sigma') &= \vec{B} \cdot \hat{n} \Sigma' \\ &= B \cos \gamma \frac{\Sigma}{\cos \gamma} \\ &= B \Sigma \end{aligned}$$



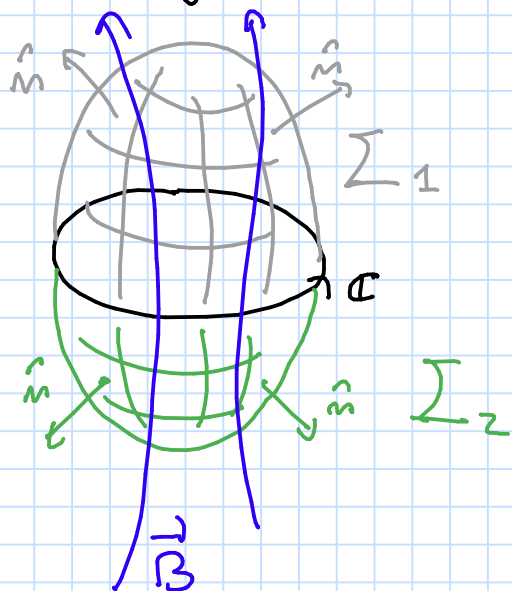
la superficie arancione
 tratteggiata ha come bordo
 le spire, quindi il flusso
 di $\vec{B}$ che la attraversa è
 lo stesso che per la scelta 1.
 Il flusso è non nullo solo
 nel solenoide (area tratteggiata)

$$\begin{aligned} \Phi_B^{\text{spira}} &= \vec{B} \cdot \hat{n} \Sigma \\ &= B \Sigma \end{aligned}$$

⊗ composta da due rettangoli
 e due triangoli



In generale :



da Gauss per campo solenoidale $\vec{B}$

$$\phi_B(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$$

$$= \phi_B(\Sigma_1) + \phi_B(\Sigma_2) = 0$$

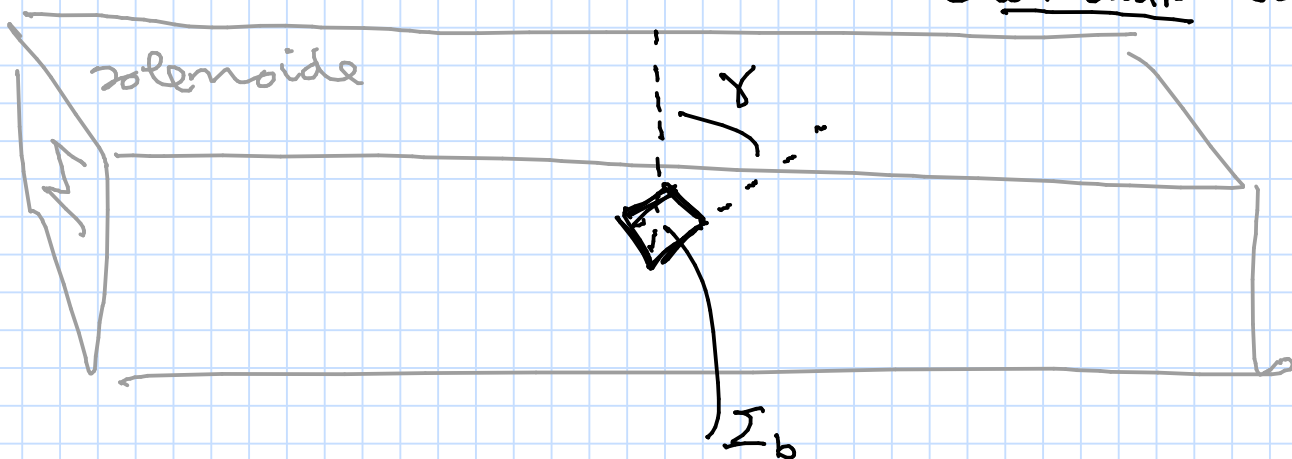
$$\Rightarrow \phi_B(\Sigma_1) = -\phi_B(\Sigma_2)$$

invertendo $\hat{n}$ su Σ_2 si trova che per ogni superficie con $\hat{n}$ concorde al verso del suo bordo $\mathcal{C}$, si genera lo stesso flusso

$$\phi_B(\Sigma_1) = \phi_B(\Sigma_2)$$

in pratica, siamo liberi di scegliere la sup. orientata, tra quelle con bordo $\mathcal{C}$, che risulta più sensata per il calcolo del flusso di $\vec{B}$

Esercizio : calcolare il coeff. di mutua ind. se la bobina è contenuta nel solenoide



stessi parametri di prima, ma bobina di superficie $\Sigma_b = 1 \text{ mm}^2$