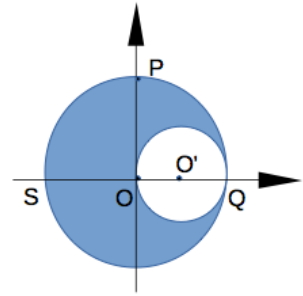


III Problema (Gauss) In una sfera cava di raggio $R=0.16$ m e' stata depositata uniformemente una carica $q=3.5 \cdot 10^{-8}$ C (zona ombreggiata in figura). La cavit  vuota e' una sfera di raggio $R'=R/2$, il centro O' della cavit  sta ad una distanza $d = OO' = R/4$ dal centro O del sistema. Il segmento OO' definisce l'asse delle ascisse. Calcolare

- 1) La densit  ρ di carica elettrica
- 2) La differenza di potenziale tra il punto O e il punto $Q(R,0)$.
- 3) La differenza di potenziale tra O e $S(-R,0)$.
- 4) Le componenti E_x, E_y del campo elettrico nel punto P di coordinate $(0,R)$.



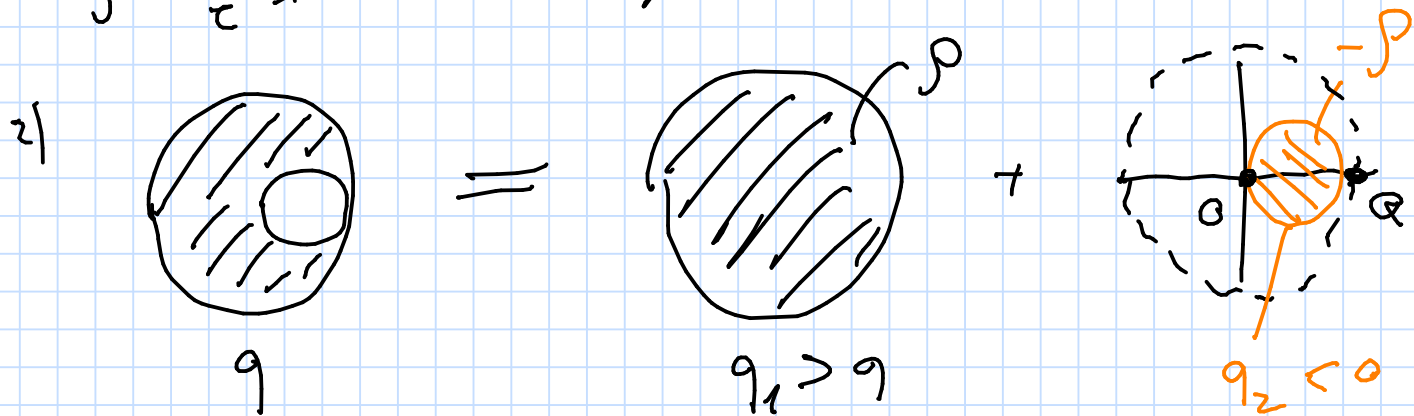
(Suggerimento : il sistema e' equivalente a quello formato da due sfere piene, una di carica positiva e raggio R , centrata in O , e una di carica negativa, di raggio R' e densit  $\rho' = -\rho$, centrata in O')

1) carica q
volume sfera cava $\tau = \tau_1 - \tau_2$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$\rho = \frac{q}{\tau} = 2.33 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^3$$



$$q_2 = -\rho \cdot \tau_2$$

$$= -\frac{1}{8} q$$

$$= -5 \text{ nC}$$

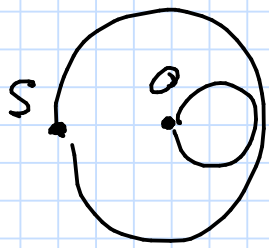
dato $E(r)$ in sfera carica $E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$

$$q_1 \Rightarrow V_1(0) - V_1(Q) = \int_0^R E(r) dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^2}{2}$$

$$q_2 \Rightarrow V_2(0) = V_2(Q)$$

$$V(0) - V(Q) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^2}{2} = 1125 \text{ V}$$

3)

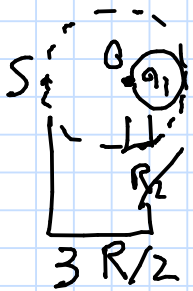


$$V(0) - V(S)$$

$$q_1 \Rightarrow V_1(0) - V_1(S) = V_1(0) - V_1(R) \quad (\text{same } R)$$



$$q_2 \Rightarrow V_2(0) - V_2(S) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R/2} - \frac{1}{3R/2} \right]$$

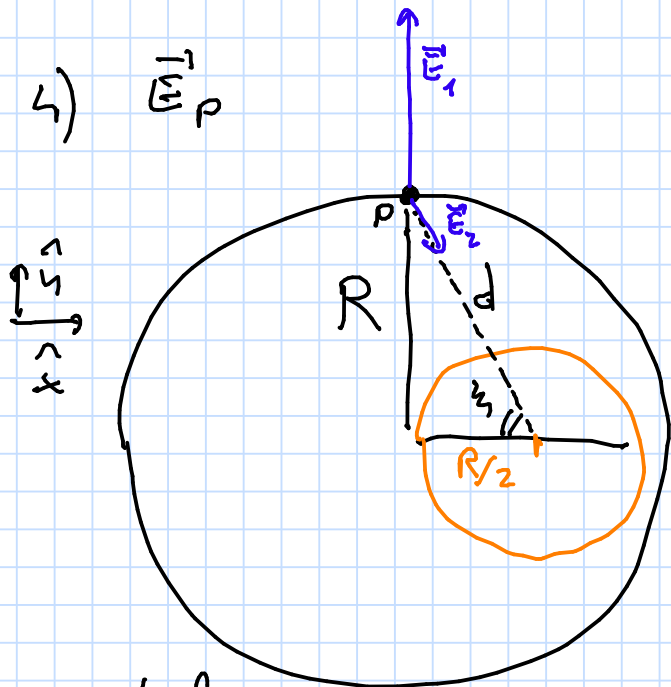


external
to q_2

$$= k q_2 \frac{4}{3} \frac{1}{R} = -375 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} V(0) - V(S) &= V_1(0) - V_1(S) + V_2(0) - V_2(S) \\ &= 750 \text{ V} \end{aligned}$$

4) $\vec{E}_P$



$$d = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} R$$

$$\cos \gamma = \frac{R/2}{d} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \gamma = \frac{R}{d} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

modulo

$$E_1 = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} = 14050 \frac{V}{m}$$

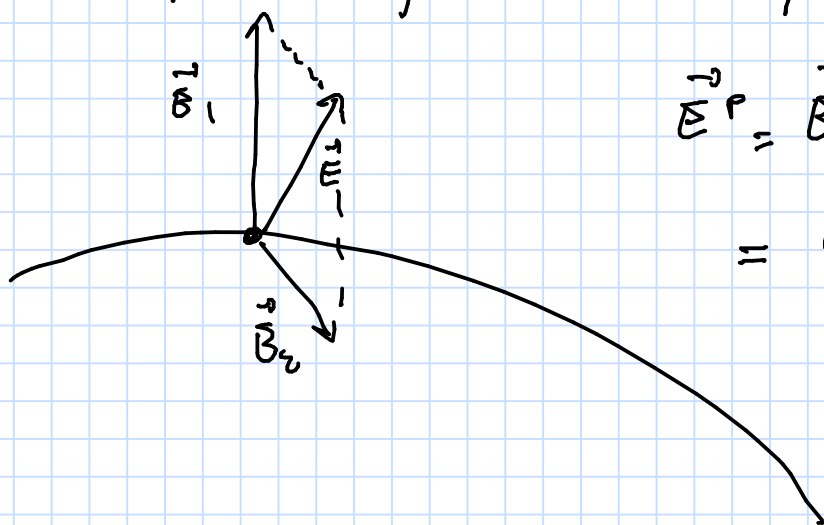


$$\vec{E}_1 = \left(14050 \frac{V}{m}\right) \hat{y}$$

$$E_2 = \frac{19.2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 1406 \frac{V}{m} \quad \begin{matrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{matrix}$$

$$E_{2x} = \cos \gamma E_2 = 629 \frac{V}{m}$$

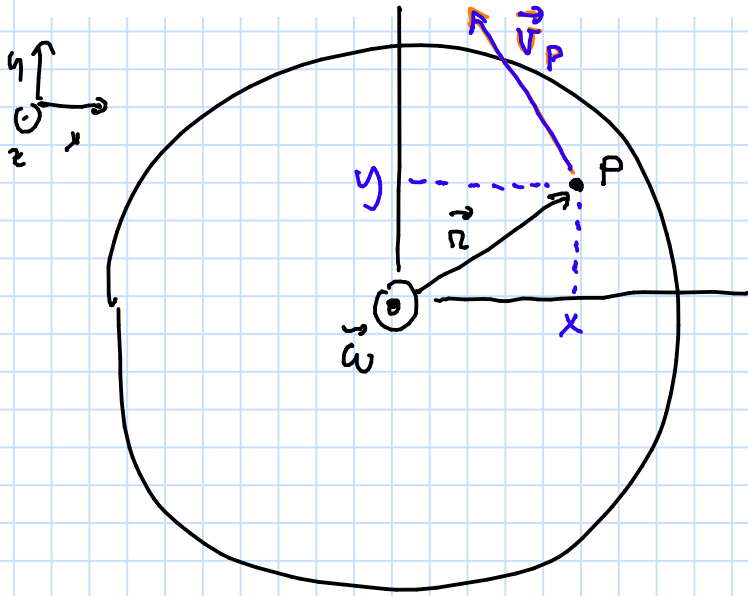
$$E_{2y} = -\sin \gamma E_2 = -1258 \frac{V}{m}$$



$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$= 629 \frac{V}{m} \hat{x} + 12792 \frac{V}{m} \hat{y}$$

IV Problema (rotore) : Un disco rigido di raggio R e' posto in rotazione con velocita' angolare costante $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{u}_z$ attorno ad un asse passante per il centro del disco e perpendicolare al piano (x,y) in cui giace il disco. Definito il campo delle velocita' di punti del disco $\vec{v} = \vec{v}(x,y)$, dimostrare che $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$.



$$\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z} = (0, 0, \omega_0)$$

$$\vec{r} = (x, y, 0)$$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

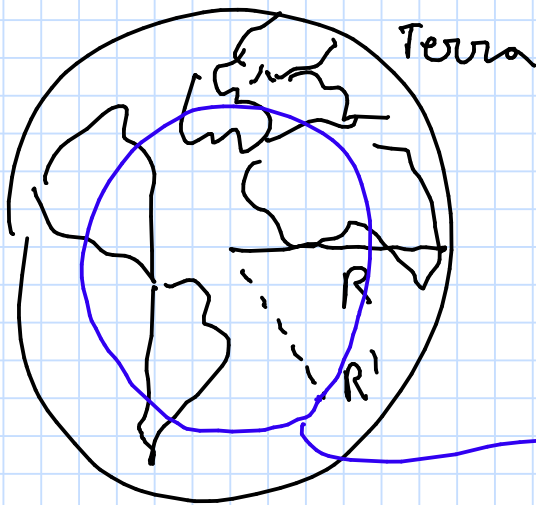
$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad z=0$$

$$= -y\omega_0 \hat{x} + x\omega_0 \hat{y}$$

rotore

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}_P = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega_0 & x\omega_0 & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\omega_0) - \frac{\partial}{\partial y} (-y\omega_0) \right] \hat{z} = 2\omega_0 \hat{z} = 2\vec{\omega}$$

I Problema (Gauss) Un minatore scava una galleria dalla superficie terrestre ($R_{\text{Terra}} = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$) fino a raggiungere un punto P che dista dal centro della terra $R' = 0.8 R$. Misurata su di una bilancia tarata sulla superficie terrestre, la massa del minatore risulta $m=60 \text{ Kg}$. Che massa leggerebbe sulla medesima bilancia il minatore appena giunto in P? (si tratti la terra come una sfera in cui la massa e' uniformemente distribuita)



minatore m

Terra M

$$R = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M' < M$$

superf.

$$F = G \frac{mM}{R^2}$$

R'

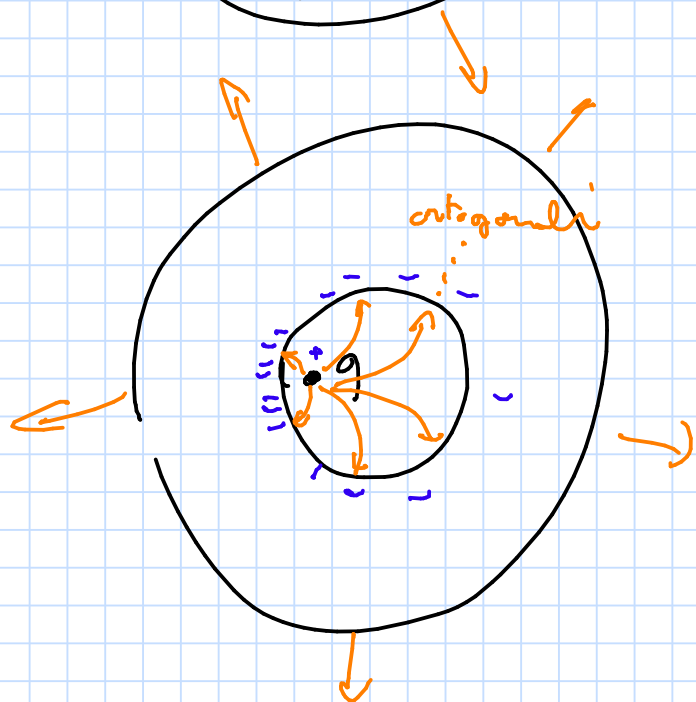
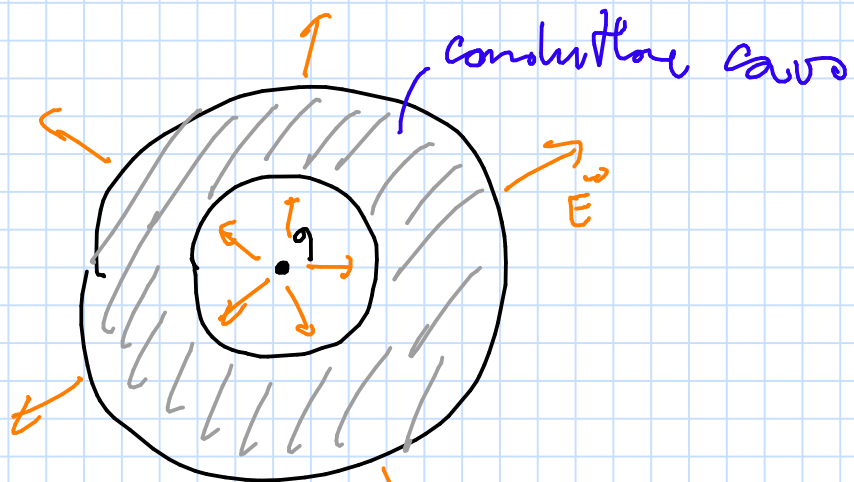
$$F' = G \frac{mM'}{R'^2}$$

$$\left| \frac{M'}{M} = \frac{R'^3}{R^3} \right.$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{R'^3}{R^3} \cdot \frac{R^2}{R'^2} = \frac{R'}{R}$$

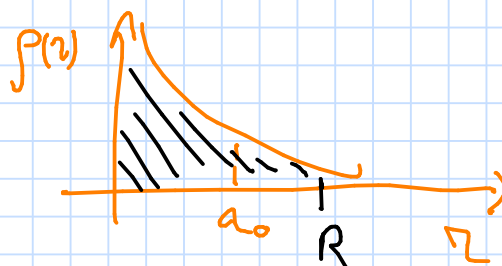
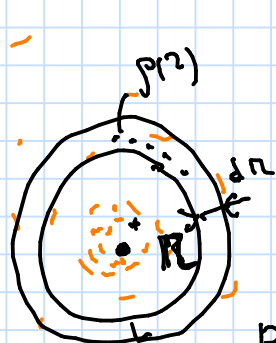
$$R' = 0.8 R$$

$$F' = \frac{R'}{R} \cdot F = 0.8 \cdot 60 \text{ N} = 48 \text{ N}$$



II Problema (Gauss) In un modello dell'atomo di idrogeno ispirato alla MQ, l'elettrone si muove così velocemente nelle vicinanze del protone che il suo contributo al campo elettrico totale è equivalente a quello di una "nube" di carica a simmetria radiale distribuita secondo la legge $\rho(r) = \rho_0 e^{-2r/a_0}$, dove $a_0 = 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ è il raggio di Bohr e r la distanza dal centro del sistema, identificato con la posizione del protone.

- 1) Calcolare il valore di ρ_0 in modo che la carica complessiva della nube eguagli quella dell'elettrone.
- 2) Trovare l'espressione analitica del campo elettrico prodotto dalla nube elettronica in funzione di r , calcolando il valore per $r=a_0$.
- 3) Calcolare il campo complessivo, cioè includendo il contributo del protone, per $r=a_0$.



$$q(R) = \int_0^R \rho(r) \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{vol. crosta sferica}}$$

$$= 4\pi \rho_0 \underbrace{\left(\frac{a_0}{2}\right)^3}_{\text{dim. di carica}} \underbrace{\int_0^R e^{-2r/a_0} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 d\left(\frac{r}{a_0}\right)}_{I(X)}$$

$$X = \frac{2r}{a_0}$$

$$X = \frac{2R}{a_0}$$

pu parti $\int_0^X e^{-x} x^2 dx$

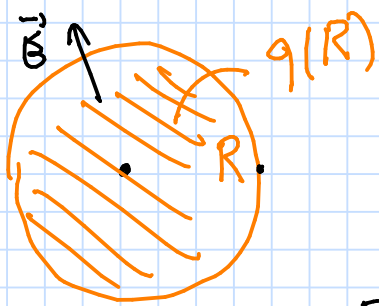
$$= [2 - e^{-x} (x^2 + 2x + 2)]$$

tutta la carica per $R \rightarrow \infty$
 $X \rightarrow \infty$

$$I(X) = 2$$

$$q(\infty) = 4\pi \rho_0 \frac{a_0^3}{8} \cdot 2 = \pi \rho_0 a_0^3 = -e$$

$$1) \rho_0 = \frac{-e}{\pi a_0^3} = -3.62 \cdot 10^{11} \text{ C/m}^3$$



$$q(R) = -\frac{e}{2\lambda} \mathcal{I}\left(X = \frac{2R}{a_0}\right)$$

2) Gauss $\Rightarrow E(R)$

$$\Phi_E = 4\pi R^2 E(R) = \frac{q(R)}{\epsilon_0} = -\frac{e}{2\epsilon_0} \left[2 - e^{-X} (X^2 + 2X + 2) \right]$$

$$E(R) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \underbrace{\frac{1}{2} e^{-X} (X^2 + 2X + 2)}_{f(X)} \right] \Big|_{X = \frac{2R}{a_0}}$$

$$E(R=a_0) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} f(2) =$$

$$\Big|_{X=2}$$

$$= -9 \cdot 10^9 \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{(0.53 \cdot 10^{-10})^2} \cdot 0.65 = -3.68 \cdot 10^{10} \frac{V}{m}$$

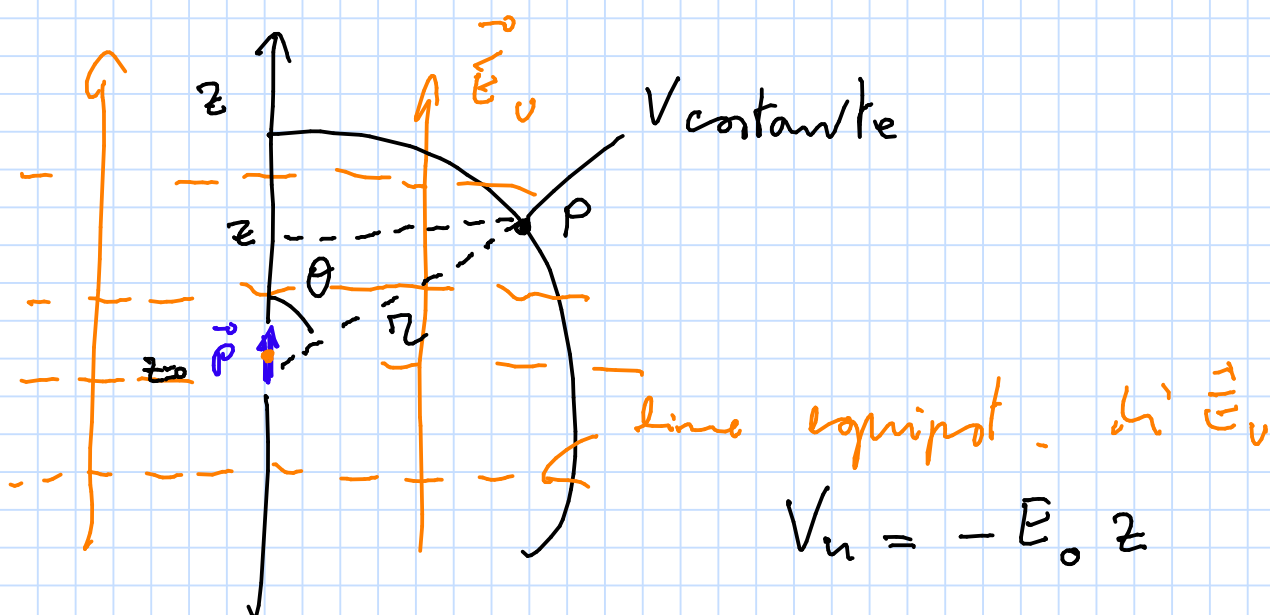
$$E^p(R=a_0) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Big|_{R=a_0}$$

$$E = k \frac{e}{a_0^2} (1 - f(2)) = 1.98 \cdot 10^{10} \frac{V}{m}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 minus value con $R=a_0$

V Problema (dipolo) : Il campo elettrico in una regione dello spazio è dato dalla sovrapposizione di un campo uniforme, $\vec{E}_U = E_0 \vec{u}_z$, e del campo $\vec{E}_D$ prodotto da un dipolo di momento $\vec{p} = p \vec{u}_z$, $\vec{E} = \vec{E}_U + \vec{E}_D$. Provare che esiste una superficie equipotenziale sferica, centrata nel centro del dipolo, calcolando i valori del raggio R , del campo $E(R)$ e del potenziale $V(R)$.

(Suggerimento : in corrispondenza alla superficie equipotenziale sferica, il campo deve essere radiale)



$$V_u = -E_0 z$$

$$z = r \cos \theta$$

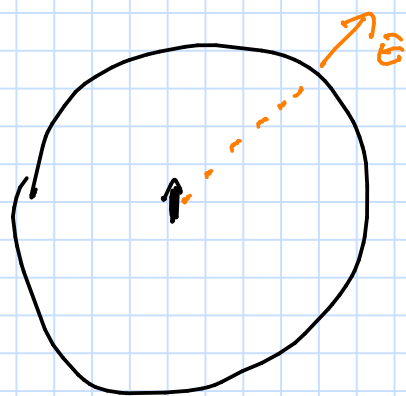
$$\cos \theta = \frac{z}{r}$$

$$V(P) = V_{\text{dip}}(P) + V_u(P) = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} - E_0 z$$

$$= \left(\frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} - E_0 \right) z$$

equipotenziale a r costante (sfera) se
per fattore z nullo (non dip. da z)

$$\frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} = E_0 \Rightarrow r = \left(\frac{p}{4\pi \epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}$$



$$V(r, \theta) = \left(\frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^2} - E_0 r \right) \cos \theta$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} + E_0 \cos \theta$$

Quattro gusci sferici conduttori concentrici, di spessore trascurabile, hanno raggio $R_1=3\text{cm}$, $R_2=6\text{cm}$, $R_3=12\text{cm}$, $R_4=15\text{cm}$.

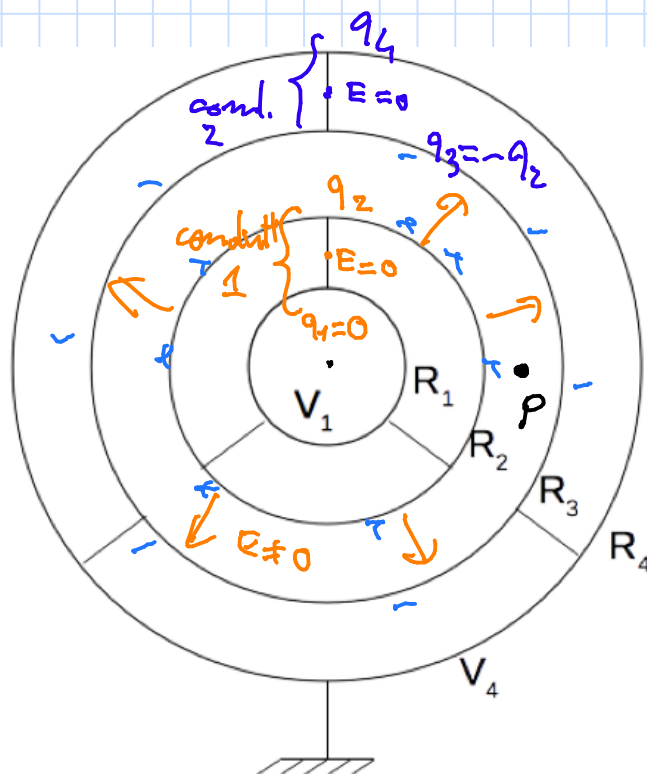
I gusci 1 e 2 sono connessi da supporti conduttori. Lo stesso vale per i gusci 3 e 4.

La sfera 4 è connessa a massa ($V_4=0\text{V}$).

La differenza di potenziale dalla sfera 1 alla sfera 4 risulta di $V_1-V_4=V_1=420\text{V}$.

Calcolare:

1. Le cariche sulle 4 sfere (q_1, q_2, q_3, q_4)
2. Il campo elettrostatico nel punto P a distanza $r=8\text{cm}$ dal centro delle sfere ($\vec{E}_P$)
3. La variazione di energia potenziale del sistema se si mantiene $V_1=420\text{V}$ e si riempiono gli spazi vuoti con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\kappa=2.5$
($U_{fin}-U_{ini}$)



$$V_1 = V_1 - \underbrace{V_4}_{\substack{\text{a} \\ \text{terra}}} = \int_{R_1}^{R_4} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_2}^{R_3} \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) q_2$$

$$q_2 = V_1 \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_3}{R_3 - R_2} = C_{23} V_1 = 5.6 \text{ nC}$$

capacità cond. sferici

$$q_4 = 0 \text{ perche } R_4 \text{ è a terra}$$

in P: q_2

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_P^2} q_2 = 7875 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$