

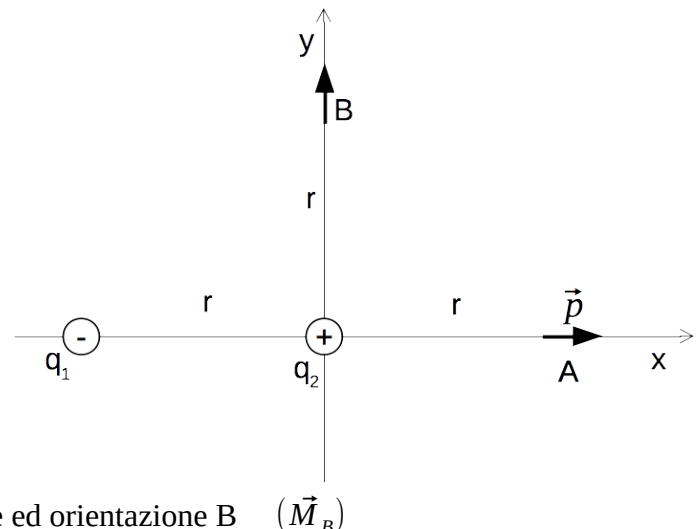
ESERCIZIO 05

- Dipolo elettrico: energia e forza
- Momento delle forze

Due cariche puntiformi $q_1 = -2 \text{ nC}$ e $q_2 = 10 \text{ nC}$ sono piazzate come in figura, a distanza $r = 20 \text{ cm}$. Un dipolo elettrico $\vec{p} = 16 (\text{nC})\text{m}$ si trova sul loro asse allineato e distante r da q_2 come in figura nel punto A.

Calcolare:

1. L'energia elettrostatica del dipolo elettrico (U_e)
2. La forza che agisce sul dipolo, se la sua orientazione non può cambiare ($\vec{F}_e$)
3. Il lavoro compiuto dal campo elettrico generato da q_1 e q_2 per portare il dipolo nella posizione ed orientazione B (W_{AB})
4. Il momento delle forze sul dipolo nella posizione ed orientazione B ($\vec{M}_B$)



1. Il campo elettrico generato da q_1 e q_2 in un punto $x > 0$ vale

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_1(x) + \vec{E}_2(x) = k \left[\frac{q_1}{(x+r)^2} + \frac{q_2}{(x)^2} \right] \hat{x}$$

quindi in A, dove $x=r=0.2\text{m}$, abbiamo

$$\vec{E}(r) = \vec{E}_1(r) + \vec{E}_2(r) = k \left[\frac{q_1}{(2r)^2} + \frac{q_2}{(r)^2} \right] \hat{x} = (-112.5 + 2250) \text{ V/m} = 2137.5 \text{ V/m}$$

Essendo $\vec{p}$ ed $\vec{E}$ paralleli ($\rightarrow \cos=1$), l'energia del dipolo risulta

$$U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE = -2137.5 \text{ V/m} * 16 \cdot 10^{-9} \text{ Cm} = -34.2 \mu\text{J}$$

2. Visto che il campo elettrostatico è conservativo, e visto che il potenziale relativo varia nella direzione x , in cui variano le distanze r e $2r$ dalle cariche, abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -\frac{dU_e}{dx} \hat{x} = \vec{F}_e = -\frac{d(-\vec{p} \cdot \vec{E})}{dx} \hat{x} = \vec{F}_e = \vec{p} \cdot \frac{d\vec{E}}{dx} \hat{x} \\ &= pk \frac{d}{dx} \left[\frac{q_1}{(x+r)^2} + \frac{q_2}{x^2} \right] \hat{x} = pk \left[\frac{-2q_1}{(x+r)^3} + \frac{-2q_2}{x^3} \right] \hat{x} = -2pk \left[\frac{q_1}{(x+r)^3} + \frac{q_2}{x^3} \right] \hat{x} \\ \vec{F}_e(A) &= -2pk \left[\frac{q_1}{(2r)^3} + \frac{q_2}{r^3} \right] \hat{x} = -2(18 \cdot 10^{-9})(9 \cdot 10^9) [-0.031 \cdot 10^{-6} + 1.25 \cdot 10^{-6}] = -351 \mu\text{N} < 0 \end{aligned}$$

è negativa: vuol dire che nel punto A prevale l'attrazione della carica negativa del dipolo con $q_2 > 0$, perché la carica positiva del dipolo (punta della freccia) è leggermente più lontana da q_2 e quindi sente un campo leggermente minore. Stiamo trascurando l'effetto di q_1 in questo ragionamento perché q_1 è

sia minore sia più lontana dal dipolo di q2.

3. Il lavoro del campo elettrostatico deve risultare nella differenza di energia del dipolo perché se non non avrebbe senso parlare di energia del dipolo e le forze sarebbero non-conservative.

Consideriamo ancora i due campi $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ nel punto B.

Il contributo del campo $\vec{E}_2$, cioè $-p \cdot \vec{E}_2$ è lo stesso in A e B, perché il dipolo è sempre parallelo alle linee del campo e alla stessa distanza da q2. Ci serve calcolare solo la differenza di $-p \cdot \vec{E}_1$ tra A e B per trovare il lavoro W.

In A avevamo p ed E1 (anti)paralleli, con modulo

$$E_1^A = k \frac{|q_1|}{(2r)^2} = 112.5 \text{ V/m} \text{ e verso antiparallelo, da cui}$$

$$U_{1A} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_1^A = -(p)(-112.5) = 1.8 \mu J > 0$$

In B, il campo 1 in modulo vale

$$E_1^B = k \frac{|q_1|}{(\sqrt{2}r)^2} = k \frac{|q_1|}{2r^2}$$

diretto in direzione SW a B verso q1.

Per calcolare $-p \cdot \vec{E}_1 = -p_{xB} E_{1x} - p_{yB} E_{1y} = -p_{yB} E_{1y}$ in questo caso basta conoscere la componente y

del campo: $E_{1y}^B = -\frac{\sqrt{2}}{2} E_1^B = -\frac{\sqrt{2}}{2} k \frac{|q_1|}{2r^2} = -159.1 \text{ V/m}$

quindi $U_{1B} = -p E_{1y}^B$

$$U_{1B} = -p E_{1y}^B = -(16 \cdot 10^{-9}) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} 225 \right) = 2.54 \mu J > 0$$

Il lavoro del campo risulta

$$W_{AB} = U_{1A} - U_{1B} = -0.75 \mu J$$

4. Il momento delle forze $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ si ottiene con la componente del campo elettrico ortogonale al momento di dipolo,

$\vec{M} = (p_y \hat{y}) \times (E_x^B \hat{x}) = p E_x (-\hat{z}) = 16 \cdot 10^{-9} \text{ Cm} \times (-159 \text{ N/C}) (-\hat{z}) = (+2.55 \cdot 10^{-6} \text{ N m}) \hat{z}$ perché la componente parallela dà contributo nullo nel **prodotto vettoriale**.

M nella direzione +z implica una coppia di forze in senso antiorario, OK.