

Soluzioni degli esercizi di riepilogo su elettrostatica e correnti

Soluzione del problema A

(a) Nelle ipotesi fatte, per ragioni di simmetria $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$, dove $\vec{u}_r$ è il versore radiale. Applicando la legge di Gauss ad un cilindro Σ di altezza $l \ll L$, coassiale a quello carico, a sua volta dimezzato dal piano indicato nel testo e la cui superficie laterale sia a distanza r dall'asse del cilindro, avremo

$$r \leq R : \quad \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) 2\pi r l = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi r^2 l \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

e analogamente

$$r \geq R : \quad \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) 2\pi r l = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi R^2 l \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r}$$

Si noti che con la scelta fatta gli effetti di bordo sono trascurabili e non c'è dunque flusso attraverso le basi del cilindro di altezza l , perché $\vec{E}$ è ad esse parallelo. Prendendo invece un cilindro di altezza L il flusso di $\vec{E}$ attraverso le basi non è affatto trascurabile, e se si arriva al risultato corretto è solo compiendo due errori che si cancellano.

(b) Imponendo, come prescritto nel testo, $V(R) = 0$:

$$V(r) = V(R) + \int_r^R \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_r^R dr' E(r')$$

da cui

$$\begin{aligned} r \leq R : \quad V(r) &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_r^R dr' r' = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2) \\ r \geq R : \quad V(r) &= \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int_r^R dr' \frac{1}{r'} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} [\log R - \log r] = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \log \frac{r}{R} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \log \frac{R}{r} \end{aligned}$$

(c) Il protone, di carica $q_p = e$, deve avere un'energia cinetica sufficiente per attraversare la barriera di potenziale. La situazione più favorevole è quella in cui la velocità iniziale $\vec{v}_{min}$ è diretta radialmente verso l'asse del cilindro ed il protone arriva al massimo della sua energia potenziale in $r = 0$ con energia cinetica nulla:

$$U_{kin,p}(R) = U_{pot,p}(0) \Rightarrow \frac{1}{2} m_p v_{min}^2 = e V(0) = \frac{e \rho R^2}{4\epsilon_0} \Rightarrow v_{min} = R \sqrt{\frac{e \rho}{2\epsilon_0 m_p}} = 9.3 \times 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(d) Per $r \leq R$ l'elettrone, di carica $q_e = -e$, è soggetto alla forza $\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$, con

$$F(r) = q_e E(r) = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} r$$

Si tratta di una forza elastica, $F(r) = -k r$, di costante elastica $k = (\rho e)/(2\epsilon_0)$. La frequenza angolare delle oscillazioni è $\omega = \sqrt{k/m}$, con $m = m_e$, ed il periodo $T = (2\pi)/\omega$, per cui

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_e}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\epsilon_0 m_e}{\rho e}} = 6.3 \times 10^{-8} \text{s}$$

Soluzione del problema B

(a) Indicata con S l'area di ciascuna armatura, la capacità equivalente del sistema dei due condensatori in parallelo nella configurazione iniziale è

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{h} + \frac{\epsilon_0 S}{h} = \frac{2\epsilon_0 S}{h}$$

Se $h'_1 = xh$ e $h'_2 = yh$, nella nuova configurazione

$$C' = C'_1 + C'_2 = \frac{\epsilon_0 S}{h'_1} + \frac{\epsilon_0 S}{h'_2} = \frac{\epsilon_0 S}{h} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{\epsilon_0 S}{h} \left(\frac{x+y}{xy} \right)$$

Allora

$$C = C' \quad \Rightarrow \quad x + y = 2xy \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{2x-1}$$

Poiché la distanza tra le armature è una quantità definita positiva, il problema ha una soluzione fisicamente accettabile solo per $x > 1/2$.

(b) Il lavoro compiuto dall'agente esterno sarà eguale alla variazione dell'energia potenziale del sistema dei due condensatori, ovvero $W = U' - U = (U'_1 + U'_2) - (U_1 + U_2)$. Ma se la capacità equivalente del sistema è la stessa prima e dopo la variazione delle distanze tra le armature, $C' = C$, avremo anche $Q' = Q$ e $V' = V_0$, da cui $U' = U$ e dunque $W = 0$.

Senza imporre la condizione $C' = C$, avremmo avuto $Q \equiv Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2 \equiv Q'$ ma $Q'_1 \neq Q_1$ e $Q'_2 \neq Q_2$, $V'_1 = V'_2 \equiv V'$ e $V_1 = V_2 = V_0$ ma $V' \neq V_0$. Non è pertanto lecito imporre $V' = V_0$ prima di imporre la condizione $C' = C$. Inoltre $Q'_1 = Q_1/x \neq Q_1$ e $Q'_2 = Q_2/y \neq Q_2$ anche dopo aver imposto $C' = C$, proprio per consentire $C'_1 = C_1/x \neq C'_2 = C_2/y$ con $V'_1 = V'_2 \equiv V' = V_0$.

(c) In questa seconda situazione avremo

$$C'' = C''_1 + C''_2 = \frac{\epsilon_0 S}{xh} + \frac{\epsilon_0 S \kappa}{h} = \frac{\epsilon_0 S}{h} \left(\frac{1}{x} + \kappa \right)$$

$$C = C'' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \kappa = 2 \quad \Rightarrow \quad \kappa = 2 - \frac{1}{x}$$

Per $x = 5$ si ottiene dunque $\kappa = 1.8$.

Poiché $\kappa \geq 1$, il problema ammette una soluzione fisicamente accettabile per $x \geq 1$.

(d)

$$|\sigma_p| = P = \epsilon_0 (\kappa - 1) E = \frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) V_0}{h} = 2.7 \times 10^{-7} \text{C/m}^2$$

Si noti che, sulla base di considerazioni analoghe a quelle esposte alla fine del punto (b), nella situazione considerata la differenza di potenziale del condensatore contenente il dielettrico è V_0 , non V_0/κ , pertanto il modulo del campo elettrico nel dielettrico è $E = V_0/h$, non $E = V_0/(\kappa h)$: la condizione $C'' = C$ è realizzata da $Q''_1 = Q_1/x$, $Q''_2 = \kappa Q_2$, $V''_1 = V''_2 \equiv V'' = V_0$, $1/x + \kappa = 2$.

Soluzione del problema C

(a) La capacità del condensatore piano si trova calcolando la capacità del condensatore equivalente composto da due condensatori in serie di pari area $A = l^2$ e spessori h e $d - h$, il primo dei quali riempito con il dielettrico. Poiché $C_{pv} = \epsilon_0 l^2 / (d - h) = 17.7 \text{ pF}$ e $C_{pd} = \epsilon_0 \kappa l^2 / h = 35.4 \text{ pF}$, la capacità risulta dunque:

$$C_p = \left(\frac{1}{\epsilon_0 \frac{l^2}{d-h}} + \frac{1}{\epsilon_0 \kappa \frac{l^2}{h}} \right)^{-1} = \frac{\epsilon_0 \kappa l^2}{h + (d - h) \kappa} = 11.8 \text{ pF}$$

La capacità del condensatore sferico è:

$$C_s = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 19.5 \text{ pF}$$

La capacità della serie risulta quindi:

$$C_T = \left(\frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_p} \right)^{-1} = 7.35 \text{ pF}$$

(b) Il campo elettrico E_0 dipende dalla densità di carica superficiale σ secondo la relazione $E_0 = \sigma / \epsilon_0$, da cui si ricava $\sigma = \epsilon_0 E_0 = 26.6 \mu\text{C/m}$. La carica Q si ottiene moltiplicando σ per l'area $A = l^2$ delle armature, $Q = \sigma A = \epsilon_0 E_0 l^2 = 266 \text{ nC}$. Il valore di V_0 si trova dividendo la carica per la capacità equivalente del sistema:

$$V_0 = \frac{Q}{C_T} = 36.1 \text{ kV}$$

(c) Il campo elettrico nella lastra di dielettrico E_d si trova ricordando che la componente del campo spostamento elettrico D ortogonale alla superficie non ha discontinuità, ovvero $D = \epsilon_0 E_0 = \epsilon_0 \kappa E_d$, da cui

$$E_d = \frac{E_0}{\kappa} = 7.5 \times 10^5 \text{ V/m}$$

La densità superficiale delle cariche di polarizzazione σ_p corrisponde al modulo del vettore polarizzazione del dielettrico P :

$$\sigma_p = P = \epsilon_0 (\kappa - 1) E_d = \frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) E_0}{\kappa} = 19.9 \mu\text{C/m}^2$$

(d) Il campo elettrico del condensatore sferico si trova utilizzando il teorema di Gauss. Tale campo risulta quindi non nullo solo per $R_1 < r < R_2$, regione nella quale vale:

$$E_s(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{l^2 E_0}{4\pi r^2}$$

Soluzione del problema D

Ricordiamo che la capacità del condensatore piano in aria è data dalla formula standard $C_0 = A \epsilon_0 / h = 1.475 \text{ pF}$ e che, proiettando come suggerito nel testo tutti i vettori su un asse verticale rivolto verso il basso, nei dielettrici normali valgono le relazioni $D = \epsilon_0 \kappa E = \epsilon_0 E + P$.

(a) La situazione della figura di sinistra corrisponde a tre condensatori piani in serie tutti con armature di area A , il primo ed il terzo con aria e spessore $[h - (h/2)]/2 = h/4$, il secondo con dielettrico e spessore $h/2$. La capacità equivalente del condensatore risulta dunque

$$C_s = \left(\frac{1}{C_{1s}} + \frac{1}{C_{2s}} + \frac{1}{C_{3s}} \right)^{-1} = \left(\frac{h/4}{A \epsilon_0} + \frac{h/2}{A \kappa \epsilon_0} + \frac{h/4}{A \epsilon_0} \right)^{-1} = \frac{A \epsilon_0}{h} \frac{2 \kappa}{\kappa + 1} = C_0 \frac{2 \kappa}{\kappa + 1} = 2.45 \text{ pF}$$

da cui

$$r_s = \frac{C_s}{C_0} = \frac{2 \kappa}{\kappa + 1} = 1.66$$

(b) Dalla legge di Gauss segue che ovunque tra le armature $D_{0,s} = D_{d,s} = \sigma_{0,s}$, dove $\sigma_{0,s}$ è la densità superficiale di carica libera (e totale) sull'armatura superiore e $-\sigma_{0,s}$ quella sull'armatura inferiore. Allora:

$$D_{0,s} = \sigma_{0,s} = \frac{Q_s}{A} = \frac{C_s V}{A} = \frac{2 \epsilon_0 \kappa V}{h (\kappa + 1)} = 8.82 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

(c) Per calcolare $\sigma_{p,s}$ osserviamo che, nelle convenzioni del testo, $\sigma_{p,s} = -P_{d,s}$. Allora:

$$\sigma_{p,s} = -P_{d,s} = -D_{d,s} \frac{\kappa - 1}{\kappa} = -\frac{2 \epsilon_0 V (\kappa - 1)}{h (\kappa + 1)} = -7.02 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

(d) La situazione della figura di destra corrisponde a due condensatori piani in parallelo, entrambi con armature di area $A/2$ distanti tra di loro h , il primo con dielettrico, il secondo con aria. La capacità equivalente del condensatore risulta dunque

$$C_d = C_{1d} + C_{2d} = \frac{A \epsilon_0 \kappa}{2h} + \frac{A \epsilon_0}{2h} = \frac{A \epsilon_0}{h} \frac{\kappa + 1}{2} = C_0 \frac{\kappa + 1}{2} = 4.35 \text{ pF}$$

da cui

$$r_d = \frac{C_d}{C_0} = \frac{\kappa + 1}{2} = 2.95$$

(e) Il campo elettrico, tangente alla superficie di separazione tra dielettrico ed aria e continuo attraverso di essa, vale $E_{0,d} = E_{d,d} = V/h$, per cui:

$$P_{d,d} = D_{d,d} - \epsilon_0 E_{d,d} = \epsilon_0 (\kappa - 1) E_{d,d} = \frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) V}{h} = 2.07 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

(f) Usando ancora la legge di Gauss:

$$\sigma_{0,d} = D_{d,d} = \epsilon_0 \kappa E_{d,d} = \frac{\epsilon_0 \kappa V}{h} = 2.60 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

Soluzione del problema E

(a) Seguendo il suggerimento contenuto nel testo:

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r L} \Rightarrow R = \int_{R_1}^{R_2} dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L} \log \frac{R_2}{R_1} = 296 \Omega$$

(b) Applicando la legge di Gauss ad un cilindro di raggio r ed altezza L coassiale al condensatore, e trascurando gli effetti di bordo, al generico istante t :

$$\Phi_E = 2\pi r L E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(r, t) = \frac{Q(t)}{2\pi\epsilon_0 L r} \vec{u}_r$$

In particolare, per $r = r_0$ e $t = t_0$:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}(r_0, t_0) = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon_0 L r_0} \vec{u}_r = 4 \times 10^4 \vec{u}_r \text{ V/m}$$

(c) Calcoliamo la capacità del condensatore a partire dalla differenza di potenziale tra le armature:

$$\Delta V = - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \log \frac{R_2}{R_1}$$

da cui si ottiene:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\log R_2/R_1} = 74.8 \text{ pF}$$

(d) Trattando il sistema come un circuito RC possiamo scrivere la legge di Ohm come:

$$\Delta V(t) = \frac{Q(t)}{C} = R I(t) = -R \frac{dQ(t)}{dt}$$

che corrisponde alla solita equazione differenziale per la scarica del condensatore, di soluzione:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad (\tau = RC = \rho \epsilon_0 = 2.21 \times 10^{-8} \text{ s})$$

Soluzione del problema F

(a) Indicata con x la distanza che separa le due armature del condensatore piano, la corrispondente capacità è data da $C(x) = \epsilon_0 S/x$, in particolare nella configurazione iniziale $C_1 = C(d_1) = \epsilon_0 S/d_1 = 5.53 \text{ pF}$. La carica elettrica presente sulle armature del condensatore è

$$Q = C_1 V_0 = \frac{\epsilon_0 S V_0}{d_1} = 6.64 \text{ nC}$$

e resta costante perché il sistema è isolato. Ad essa corrisponde una densità superficiale di carica sulle armature $\sigma = Q/S = 1.33 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$, che genera una pressione elettrostatica su ciascuna armatura pari a $p = \sigma^2/(2\epsilon_0) = 9.96 \text{ N/m}^2$. La forza di attrazione agente su ciascuna armatura è perciò indipendente dalla distanza x , e vale in modulo:

$$F(d_2) = p S = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2 d_1^2} = 4.98 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Allo stesso risultato si può arrivare con considerazioni energetiche. Indicata con $U(x)$ l'energia elettrostatica del condensatore:

$$F(d_2) = \left| \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=d_2} = \left| \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} \right|_{x=d_2} = \left| \frac{d}{dx} \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2 d_1^2} x \right|_{x=d_2} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2 d_1^2} = 4.98 \times 10^{-3} \text{ N}$$

(b) Il lavoro compiuto dalla forza esterna quando la distanza tra le armature viene aumentata da d_1 a d_2 , con le armature a riposo prima e dopo l'operazione, è eguale in modulo ma di segno opposto al lavoro (negativo) compiuto dalla forza elettrostatica (attrattiva) tra le armature:

$$W_e = -W_c = F(d_2 - d_1) = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2 d_1^2} (d_2 - d_1) = 4.08 \times 10^{-5} \text{ J}$$

Anche in questo caso si può arrivare al risultato con considerazioni energetiche:

$$W_e = -W_c = U(d_2) - U(d_1) = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2 d_1^2} (d_2 - d_1) = 4.08 \times 10^{-5} \text{ J}$$

(c) Se mentre l'armatura viene spostata dalla forza esterna il condensatore resta collegato al generatore, quest'ultimo mantiene al valore fissato V_0 la differenza di potenziale tra le armature, e la carica elettrica presente sulle armature varia con la distanza x secondo la legge

$$\tilde{Q}(x) = C(x) V_0 = \frac{\epsilon_0 S V_0}{x}$$

In tal caso la forza di attrazione tra le armature diventa

$$\tilde{F}(x) = \tilde{p}(x) S = \frac{\tilde{Q}^2(x)}{2 \epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2 x^2}$$

ovvero, per $x = d_2$:

$$\tilde{F}(d_2) = \tilde{p}(d_2) S = \frac{\tilde{Q}^2(d_2)}{2 \epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2 d_2^2} = 3.93 \times 10^{-5} \text{ N}$$

(d) Anche in questo caso il lavoro $\tilde{W}_e$ delle forza meccanica esterna è eguale in modulo ma di segno opposto al lavoro (negativo) compiuto dalla forza elettrostatica che agisce sull'armatura mobile. Tale forza dipende però in questo caso dalla posizione, dunque per calcolare il lavoro si deve integrare il lavoro infinitesimo tra le posizioni iniziale e finale:

$$\tilde{W}_e = \int_{d_1}^{d_2} \tilde{F}(x) dx = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = 3.63 \times 10^{-6} \text{ J}$$

(e) Il generatore, dovendo mantenere costante la differenza di potenziale V_0 tra le armature, deve fornire la carica supplementare $\Delta Q = \tilde{Q}(d_2) - \tilde{Q}(d_1)$ che compensi la variazione di capacità dovuta all'allontanamento delle armature. Il lavoro del generatore è perciò quello necessario ad aggiungere la carica ΔQ a potenziale costante V_0 :

$$\tilde{W}_g = V_0 \Delta Q = V_0 [\tilde{Q}(d_2) - \tilde{Q}(d_1)] = V_0^2 (C_2 - C_1) = \epsilon_0 V_0^2 S \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) = -7.26 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Anche in questo caso il risultato si sarebbe potuto ricavare sulla base di considerazioni energetiche. La variazione di energia elettrostatica del sistema, corrispondente alla somma dei lavori compiuti dalla forza meccanica esterna e dal generatore, $\Delta U = \widetilde{W}_e + \widetilde{W}_g$, è:

$$\Delta U = \widetilde{U}(d_2) - \widetilde{U}(d_1) = \frac{\widetilde{Q}(d_2)}{2C_2} - \frac{\widetilde{Q}(d_1)}{2C_1} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) = -3.63 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Allora:

$$\widetilde{W}_g = \Delta U - \widetilde{W}_e = \epsilon_0 V_0^2 S \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) = -7.26 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Soluzione del problema G

(a) Applicando al caso in esame le condizioni generali di discontinuità sulla superficie di separazione tra due dielettrici, ed utilizzando per i moduli dei campi i simboli $E_0 = |\vec{E}_0|$ ed $E_1 = |\vec{E}_1|$:

$$E_{0,t} = E_{1,t} \quad \Rightarrow \quad E_0 \sin \theta_0 = E_1 \sin \theta_1$$

$$D_{0,n} = D_{1,n} \quad \Rightarrow \quad E_{0,n} = \kappa E_{1,n} \quad \Rightarrow \quad E_0 \cos \theta_0 = \kappa E_1 \cos \theta_1$$

da cui:

$$E_1 = \sqrt{E_{1,t}^2 + E_{1,n}^2} = \sqrt{E_{0,t}^2 + \frac{E_{0,n}^2}{\kappa^2}} = E_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{\cos^2 \theta_0}{\kappa^2}}$$

(b) Dall'espressione precedente e da $\cos^2 \theta < \cos^2 \theta / \kappa$ per $\kappa > 1$ si ottiene immediatamente che $E_1 \leq E_0$, la relazione essendo soddisfatta come eguaglianza solo per $\theta_0 = \theta_1 = \pi/2$.

(c) Per $\theta_1 \neq \pi/2$ possiamo dividere membro a membro le due condizioni di discontinuità:

$$\tan \theta_0 = \frac{1}{\kappa} \tan \theta_1$$

da cui $\theta_0 = \arctan[(\tan \theta_1)/\kappa] = 0.276$ radianti (15.8°).

(d) La densità di carica di polarizzazione σ_p è legata al vettore polarizzazione $\vec{P}$ dalla relazione:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

con $\vec{n}$ versore normale alla superficie orientato verso l'esterno. Per un dielettrico normale:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \vec{E}_1$$

dunque sulla faccia di destra:

$$\sigma_{p,d} = \vec{P} \cdot \vec{n}_d = \epsilon_0 (\kappa - 1) E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_0 \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} E_0 \cos \theta_0 = 11.0 \text{ pC/m}^2$$

Sulla faccia di sinistra il versore normale è l'opposto di quello sulla faccia di destra, $\vec{n}_s = -\vec{n}_d$, dunque anche la densità di carica di polarizzazione è opposta, $\sigma_{p,s} = -\sigma_{p,d}$.

Soluzione del problema H

(a) Posto $\vec{r}_1 = z_1 \vec{u}_z$, $\vec{r}_2 = z_2 \vec{u}_z$ ed indicando con θ l'angolo polare:

$$\begin{aligned} 0 &= 4\pi\epsilon_0 V(\vec{r}) = \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} = \frac{q_1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_1)^2}} - \frac{q_1 \sqrt{z_2/z_1}}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_2)^2}} \\ &= q_1 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rz_1 \cos \theta + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{z_1}{z_2} r^2 - 2rz_1 \cos \theta + z_1 z_2}} \right) \\ &\Rightarrow r^2 + z_1^2 = \frac{z_1}{z_2} r^2 + z_1 z_2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = z_1 z_2 \end{aligned}$$

che è appunto l'equazione di una superficie sferica centrata nell'origine di raggio

$$R = \sqrt{z_1 z_2} = 7.42 \text{ cm} = 0.0742 \text{ m}$$

(b) All'interno della sfera la situazione è del tutto equivalente alla configurazione iniziale, dunque:

$$\vec{F} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 (z_1 - z_2)^2} \vec{u}_z = \frac{q_1^2 \sqrt{z_2/z_1}}{4\pi\epsilon_0 (z_1 - z_2)^2} \vec{u}_z = 6.95 \text{ N } \vec{u}_z$$

(c) Essendo il guscio sferico mantenuto a terra, dunque a potenziale identicamente nullo, e non essendovi cariche elettriche al suo esterno, per l'unicità delle soluzioni dell'equazione di Poisson il potenziale al suo esterno è identicamente nullo, dunque anche il campo elettrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv 0 \quad (|\vec{r}| > R)$$

(d) Il campo elettrico in prossimità della superficie interna del guscio sferico sarà ortogonale a questa e dunque radiale, rivolto verso il centro, e (in ovvia notazione) dato da

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\right]_{r=R^-} \vec{u}_r$$

Partendo dall'espressione di $V(\vec{r})$ ricavata al punto (a) e sostituendovi $z_2 = R^2/z_1$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon_0 \left[\frac{\partial V}{\partial r}\right]_{r=R^-} = \frac{q_1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rz_1 \cos \theta + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{z_1^2 r^2/R^2 - 2rz_1 \cos \theta + R^2}} \right)\right]_{r=R^-} \\ &= \frac{q_1}{4\pi} \left[\left(-\frac{r - z_1 \cos \theta}{(r^2 - 2rz_1 \cos \theta + z_1^2)^{3/2}} + \frac{z_1^2 r/R^2 - z_1 \cos \theta}{(z_1^2 r^2/R^2 - 2rz_1 \cos \theta + R^2)^{3/2}} \right)\right]_{r=R^-} \\ &= \frac{q_1}{4\pi} \frac{z_1^2/R - R}{(R^2 - 2Rz_1 \cos \theta + z_1^2)^{3/2}} = \frac{-q_1}{4\pi R} \frac{R^2 - z_1^2}{(R^2 - 2Rz_1 \cos \theta + z_1^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

(e) Nel caso in cui la sfera non sia mantenuta a terra, il guscio sferico ha sulla sua superficie esterna una distribuzione di carica uniforme con carica totale sulla superficie pari a q_1 . Allora, sfruttando la legge di Gauss e la simmetria sferica all'esterno del guscio sferico, il campo elettrico richiesto è

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (|\vec{r}| > R)$$