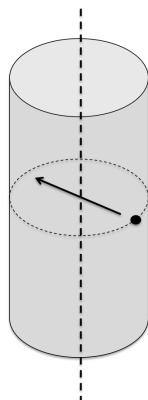


## Esercizi di riepilogo su elettrostatica e correnti

### Problema A

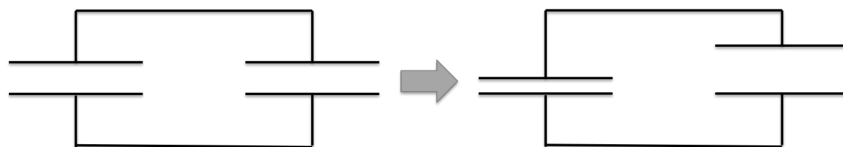


Si consideri un cilindro circolare retto di raggio  $R = 4\text{ cm}$  e di altezza  $L \gg R$ , con densità di carica uniforme  $\rho = 10^{-6}\text{ C/m}^3$ . Si considerino i punti del piano ortogonale all'asse del cilindro che taglia a metà il cilindro, con distanza dall'asse del cilindro  $r \ll L$ .

- (a) Si calcoli il campo elettrico  $\vec{E}(r)$  in funzione di  $r$ , sia per  $r \leq R$  che per  $r \geq R$ .
- (b) Si calcoli il potenziale  $V(r)$  in funzione di  $r$ , imponendo che sia  $V(R) = 0$ .
- (c) Si calcoli la velocità minima  $v_{\min}$  con cui un protone deve partire dalla superficie del cilindro per attraversare radialmente tutta la distribuzione di carica.
- (d) Si mostri che un elettrone inizialmente in quiete sulla superficie del cilindro compie un moto oscillatorio lungo un diametro, e si calcoli il periodo  $T$  dell'oscillazione.

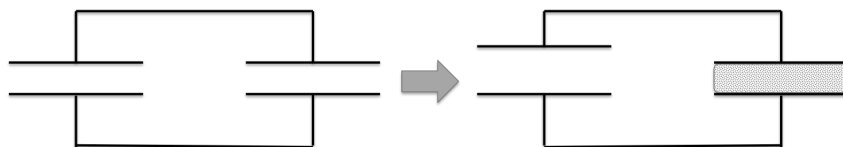
Note:  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{ F/m}$ ,  $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\text{ kg}$ ,  $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}$ ,  $e = 1.60 \times 10^{-19}\text{ C}$ .

### Problema B



Due condensatori piani uguali, di capacità  $C_1 = C_2 = 30\text{ pF}$ , sono disposti in parallelo e portati da un generatore ad una differenza di potenziale  $V_0 = 150\text{ V}$ . Il generatore viene poi scollegato ed il sistema rimane isolato elettricamente. La distanza tra le armature vale inizialmente per entrambi  $h = 4\text{ mm}$ .

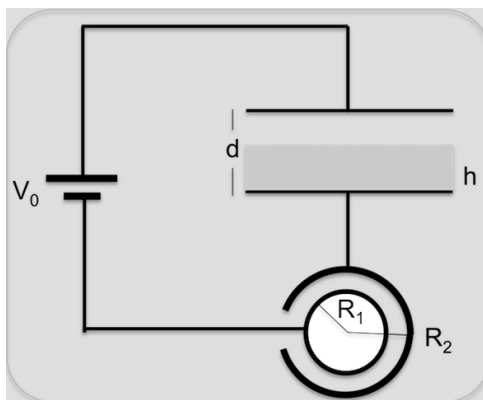
- (a) Se la distanza tra le armature del primo condensatore viene variata da  $h$  a  $h'_1 = xh$ , per quale fattore  $y$  deve essere moltiplicata la distanza tra le armature del secondo condensatore affinché la capacità equivalente del sistema rimanga la stessa che nella configurazione iniziale? Il problema posto ha sempre soluzione?
- (b) Se  $x = 0.75$ , quanto vale il lavoro complessivo  $W$  compiuto da un agente esterno per variare le distanze di entrambe le armature?



Per compensare l'effetto della variazione della distanza tra le armature del primo condensatore, che assumiamo ora crescere di un fattore  $x = 5$ , questa volta si inserisce nell'altro condensatore una fetta di materiale dielettrico normale (lineare, isotropo ed omogeneo) della stessa area e di spessore  $h$  pari alla distanza tra le armature.

- (c) Quanto deve valere la costante dielettrica relativa  $\kappa$  perché la capacità equivalente del sistema rimanga la stessa che nella configurazione iniziale? Per quali valori di  $x$  il problema ammette soluzione?
- (d) Si calcoli (in modulo) la densità superficiale di polarizzazione  $|\sigma_p|$  sulle superfici del dielettrico che si affacciano sulle armature.

### Problema C

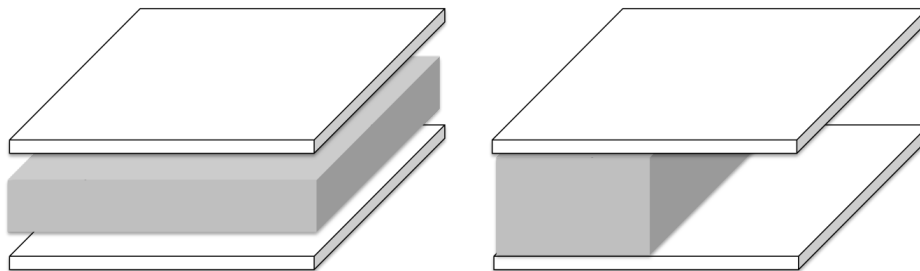


Il circuito rappresentato nella figura consiste di due condensatori, uno piano di capacità  $C_p$  ed uno sferico di capacità  $C_s$ . I due condensatori sono collegati in serie ad un generatore di forza elettromotrice. Le armature del condensatore piano sono quadrati di lato  $l = 10$  cm posti ad una distanza  $d = 1.5$  cm. Tra le armature è presente una lastra di materiale dielettrico lineare ed omogeneo di costante dielettrica relativa  $\kappa = 4$  con la stessa area e di spessore  $h = 1$  cm. Le armature interna ed esterna del condensatore sferico hanno rispettivamente raggi  $R_1 = 5$  cm e

$R_2 = 7$  cm. Tra di loro vi è aria. Il valore  $V_0$  della fem prodotta dal generatore è tale che il valore del campo elettrico  $E_0$  nella zona priva di dielettrico del condensatore piano corrisponde al massimo consentito dalla rigidità dielettrica del vuoto, ovvero  $E_0 = 3 \times 10^6$  V/m.

- (a) Si calcoli il valore delle capacità  $C_p$  e  $C_s$  e della capacità equivalente  $C_T$  del circuito, ricordando che  $\epsilon_0 = 8.85$  pF/m.
- (b) Si determini  $V_0$ .
- (c) Si determini la densità superficiale di carica di polarizzazione  $\sigma_p$  nel dielettrico.
- (d) Si determini il campo elettrico  $E_s(r)$  nel condensatore sferico in funzione della distanza  $r$  dal centro.

### Problema D



Si consideri un condensatore piano con armature quadrate di area  $A = 2.5 \text{ cm}^2$ , alla distanza  $h = 1.5 \text{ mm}$ . Si ha a disposizione una quantità di dielettrico normale, di costante dielettrica relativa  $\kappa = 4.9$ , sufficiente a riempire metà del volume compreso tra le armature. Si vogliono confrontare la situazione della figura di sinistra (la fetta di dielettrico è un parallelepipedo di area di base  $A$  che occupa uno spessore  $h/2$  al centro del condensatore), quella della figura di destra (la fetta di dielettrico ha lo stesso spessore  $h$  del condensatore, ma è un parallelepipedo di area  $A/2$  a contatto con entrambe le armature) e la situazione in cui tra le armature c'è solo aria. La differenza tra il potenziale dell'armatura superiore e quello dell'armatura inferiore è fissata a  $V = 9 \text{ V}$  in tutti e tre i casi. Si trascurino gli effetti di bordo e la differenza tra la costante dielettrica dell'aria e quella del vuoto, ricordando che  $\epsilon_0 = 8.85$  pF/m. Dei campi vettoriali si considerino direttamente le proiezioni su un asse verticale diretto verso il basso. Si esprimano analiticamente tutti i risultati in termini dei dati ( $A, h, \kappa, V, \epsilon_0$ ) e li si valuti numericamente.

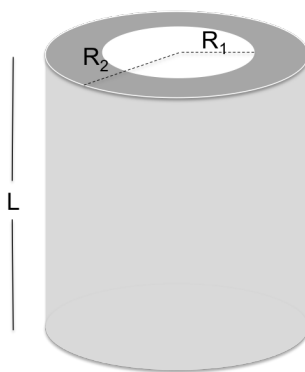
Facendo riferimento alla figura di sinistra, si calcolino:

- (a) la capacità equivalente  $C_s$  del condensatore;
- (b) lo spostamento elettrico  $D_{0,s}$  nella parte in aria del condensatore;
- (c) la densità superficiale di carica di polarizzazione  $\sigma_{p,s}$  sulla faccia superiore del dielettrico.

Facendo riferimento alla figura di destra, si calcolino:

- (d) il rapporto  $r_d = C_d/C_0$ , dove  $C_0$  è la capacità del condensatore in assenza di dielettrico;
- (e) la polarizzazione  $P_{d,d}$  nel dielettrico;
- (f) la densità superficiale di carica libera  $\sigma_{0,d}$  sulla parte dell'armatura superiore del condensatore sopra il dielettrico.

### Problema E

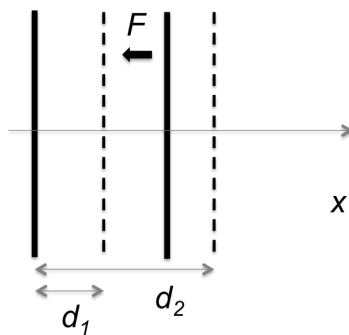


Si consideri un condensatore cilindrico con raggi  $R_1 = 2$  mm e  $R_2 = 2.5$  mm, lunghezza  $L = 30$  cm e carica  $Q_0 = 1.5$  nC sull'armatura interna ( $-Q_0$  su quella esterna). Lo spazio tra le armature ( $R_1 < r < R_2$ ) viene riempito all'istante  $t_0 = 0$  con del silicio, la cui resistività è  $\rho = 2500 \Omega\text{m}$ , ed a partire da quell'istante ha luogo il processo di scarica.

- (a) Osservando che la densità di corrente di conduzione  $\vec{j}_c = j_c(r) \vec{u}_r$  ha direzione radiale, con  $\vec{u}_r$  perpendicolare all'asse del cilindro e diretto verso l'esterno, si determini la resistenza  $R$  del conduttore tra le armature (*si consideri una serie di gusci cilindrici infinitesimi di spessore  $dr$* ).
- (b) Si determini il campo elettrico  $\vec{E}_0$  alla distanza dall'asse  $r_0 = 2.25$  mm ed all'istante  $t_0 = 0$ , trascurando gli effetti di bordo.
- (c) Si determini la capacità  $C$  del condensatore, trascurando gli effetti di bordo.
- (d) Si determini la carica  $Q(t)$  sull'armatura interna per  $t > 0$ , ovvero durante il processo di scarica (*si consideri il sistema come un circuito  $RC$* ). Basta l'espressione analitica.

### Problema F

Un condensatore piano, con armature di area  $S = 5 \text{ cm}^2$  alla distanza  $d_1 = 0.8$  mm, è caricato da un generatore che fornisce una differenza di potenziale  $V_0 = 1200$  V. Dopo che le armature sono state caricate, il generatore viene sconnesso. Un'armatura del condensatore viene quindi allontanata dall'altra, tenuta fissa, dall'azione di una forza esterna e riposizionata ad una distanza  $d_2 = 0.9$  cm, come in figura 1. Trascurando gli effetti di bordo e ricordando che  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ , si calcolino:

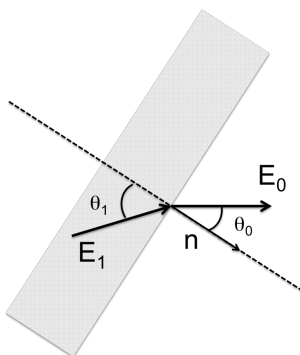


- (a) il modulo  $F(d_2)$  della forza di attrazione elettrostatica tra le armature alla distanza  $d_2$ ;
- (b) il lavoro  $W_e$  compiuto dalla forza esterna per allontanare l'armatura mobile da  $d_1$  a  $d_2$ .

Si consideri ora la situazione alternativa in cui il condensatore resta collegato al generatore durante lo spostamento dell'armatura, e si ricalcolino in tale situazione:

- (c) il modulo  $\tilde{F}(d_2)$  della forza di attrazione elettrostatica tra le armature alla distanza  $d_2$ ;
- (d) il lavoro  $\tilde{W}_e$  compiuto dalla forza esterna per allontanare l'armatura mobile da  $d_1$  a  $d_2$ ;
- (e) il lavoro  $\tilde{W}_g$  compiuto dal generatore in tale allontanamento da  $d_1$  a  $d_2$ .

### Problema G



Una lastra a facce piane e parallele di dielettrico normale, con costante dielettrica relativa  $\kappa$ , viene posta in una regione di spazio vuoto in cui è presente un campo elettrico esterno  $\vec{E}_0$  uniforme e costante. La lastra può essere considerata in buona approssimazione infinitamente estesa, mentre il suo spessore è finito. Siano  $\theta_0$  e  $\theta_1$  gli angoli non orientati tra la direzione del campo elettrico all'esterno e all'interno della lastra, rispettivamente, e la direzione normale alla superficie.

- (a) Si esprima il modulo  $|\vec{E}_1|$  del campo elettrico nel dielettrico in funzione di  $\kappa$ ,  $|\vec{E}_0|$  e  $\theta_0$ .

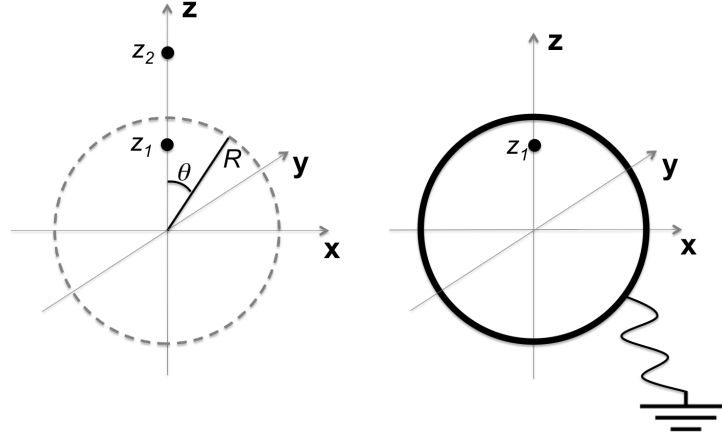
(b) Per  $\kappa > 1$ , può essere  $|\vec{E}_1| > |\vec{E}_0|$  ? Si motivi analiticamente la risposta.

Nel caso in cui  $\kappa = 4.2$ ,  $|\vec{E}_0| = 1.7$  V/m e  $\theta_1 = 5\pi/18$ , si calcolino:

(c) l'angolo  $\theta_0$ ;

(d) facendo riferimento alla figura, le densità superficiali di carica di polarizzazione sulla faccia di destra ( $\sigma_{p,d}$ ) e su quella di sinistra ( $\sigma_{p,s}$ ) del dielettrico.

### Problema H



Due cariche puntiformi  $q_1 = -1.8 \times 10^{-6}$  C e  $q_2$  giacciono lungo l'asse  $z$  nei punti di coordinate  $z_1 = 4.3$  cm e  $z_2 = 12.8$  cm rispettivamente, con  $q_2 = -q_1 \sqrt{z_2/z_1}$ .

(a) Dimostrare che, nella consueta convenzione in cui il potenziale tende a zero all'infinito, esiste una superficie sferica centrata nell'origine a potenziale  $V_0 = 0$  e determinarne il raggio  $R$ .

Un guscio sferico conduttore cavo di raggio  $R$ , di spessore trascurabile e collegato a terra, viene ora posizionato con il centro nell'origine. La carica  $q_2$  viene invece rimossa.

(b) Calcolare la forza  $\vec{F}$  che il guscio sferico esercita sulla carica  $q_1$ , specificandone modulo, direzione e verso.

(c) Determinare il campo elettrico  $\vec{E}(\vec{r})$  all'esterno del guscio sferico ( $|\vec{r}| > R$ ).

(d) Facendo riferimento alla figura, determinare la densità superficiale di carica  $\sigma$  sulla superficie interna del guscio sferico in funzione dell'angolo  $\theta$  e di  $q_1$ ,  $z_1$ ,  $R$ .

(e) Determinare il campo elettrico  $\vec{E}(\vec{r})$  all'esterno del guscio sferico ( $|\vec{r}| > R$ ) nel caso in cui quest'ultimo non sia messo a terra ma isolato e con carica totale nulla.

Nel rispondere alle ultime tre domande non serve inserire i valori numerici, ma vanno specificati modulo, direzione e verso del campo elettrico e la risposta va adeguatamente motivata.