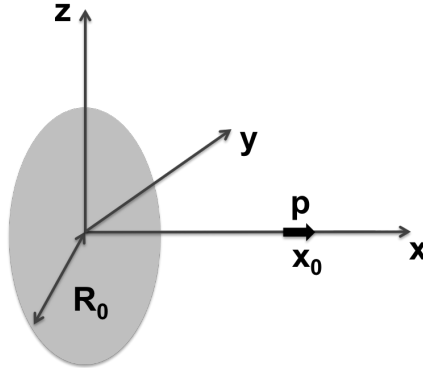


Altri esercizi di riepilogo su elettrostatica e correnti

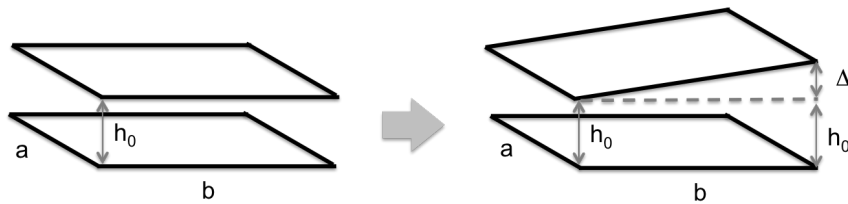
Problema I



Su un disco di raggio $R_0 = 5.5 \text{ cm}$, giacente nel piano (yz) e centrato nell'origine, è presente una densità superficiale di carica $\sigma = 3.7 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$. Nel punto dell'asse x di coordinata $x_0 = 23 \text{ cm}$ è posto un piccolo dipolo elettrico di momento $\vec{p} = p \vec{u}_x$, con $p = 3.5 \times 10^{-9} \text{ C m}$ e momento di inerzia $I = 2 \times 10^{-8} \text{ kg m}^2$. Calcolare, motivando adeguatamente le risposte:

- (a) il potenziale $V(x_0)$ ed il campo elettrico $\vec{E}(x_0)$ generati dal disco nella posizione del dipolo;
- (b) la forza risultante $\vec{F}_{ris}$ agente sul dipolo;
- (c) il lavoro W_e compiuto dal campo elettrico del disco se il dipolo viene traslato lungo l'asse x (senza ruotare) da x_0 a $x_1 = 2x_0$;
- (d) il periodo T delle piccole oscillazioni del dipolo, tenuto fermo in x_0 ma lasciato libero di ruotare senza attrito nel piano (xy) , se perturbato attorno alla sua posizione di equilibrio stabile.

Problema J



Un condensatore piano ha armature rettangolari, con lati lunghi $a = 3.3 \text{ cm}$ e $b = 3.9 \text{ cm}$, poste inizialmente ad una distanza $h_0 = 1.5 \text{ mm}$. In questa configurazione il condensatore viene portato da un generatore alla differenza di potenziale $V_0 = 65 \text{ V}$. Successivamente un lato di lunghezza a dell'armatura superiore viene leggermente sollevato, tenendo fisso il lato opposto, portando la sua distanza dall'armatura inferiore a $h_0 + \Delta$, con $\Delta = 0.2 \text{ mm}$. Calcolare:

- (a) la capacità C' del condensatore nella nuova configurazione (*suggerimento: si suddividano*

le armature in rettangoli infinitesimi di lati a e dx , e si tenga conto che la piccolezza dell'angolo θ tra di esse consente le approssimazioni $\sin \theta \simeq \theta$ e $\cos \theta \simeq 1$; se non si sa rispondere così, si calcoli la capacità C'' del condensatore ottenuto da quello iniziale sollevando l'armatura superiore di $\Delta/2$, mantenendola parallela a quella inferiore, e la si adotti nel seguito come stima di C');

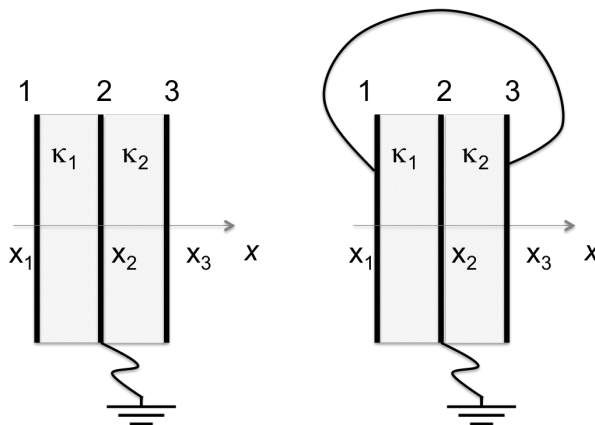
(b) il lavoro W_e compiuto dal campo elettrico nel sollevamento del lato dell'armatura superiore, se tale operazione avviene dopo aver scollegato il condensatore dal generatore.

All'istante $t_0 = 0$, il condensatore nella nuova configurazione (figura di destra), sempre scollegato dal generatore, viene riempito con un materiale di resistività $\rho = 6.4 \times 10^3 \Omega \text{ m}$, ed una corrente inizia a scorrere tra le due armature, scaricando il condensatore. Calcolare:

(c) la resistenza R' del materiale al passaggio della corrente tra le due armature (anche in questo caso, se non si è in grado di rispondere, si calcoli la resistenza R'' di un parallelepipedo di materiale di lati $(a, b, h_0 + \Delta/2)$ e la si adotti nel seguito come stima di R');

(d) la differenza di potenziale $V(t_1)$ tra le armature del condensatore all'istante $t_1 = 10^{-7} \text{ s}$.

Problema K



Tre armature piane conduttrici, di area $\Sigma = 0.25 \text{ m}^2$, sono disposte rispettivamente nei piani di equazione $x_1 = 1.5 \text{ cm}$, $x_2 = 3.0 \text{ cm}$, $x_3 = 4.5 \text{ cm}$. L'armatura centrale è collegata a terra, mentre le armature 1 e 3 sono isolate, con densità di carica $\sigma_1 = 5 \mu\text{C}/\text{m}^2$ e $\sigma_3 = -2 \mu\text{C}/\text{m}^2$ rispettivamente. Tra le armature 1 e 2 e tra le armature 2 e 3 si trovano due dielettrici normali di costanti dielettriche relative $\kappa_1 = 3$ e $\kappa_2 = 2$ rispettivamente. Determinare:

(a) il potenziale $V(x)$ in funzione della posizione x all'interno del sistema di armature, in particolare il valore di $V(x_3)$;

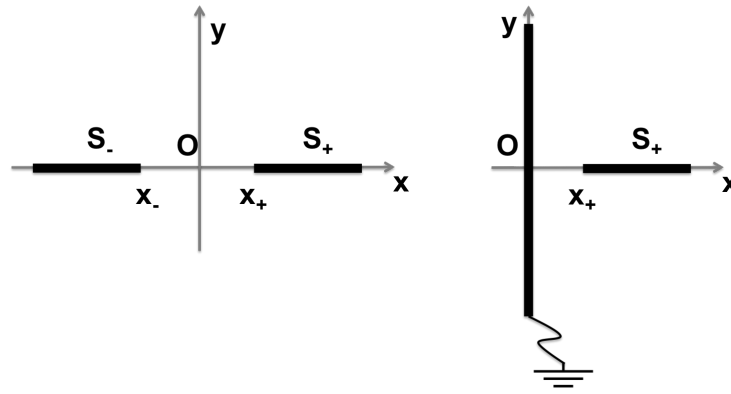
(b) la densità di carica libera σ_{l2} presente sull'armatura 2;

(c) le densità di carica di polarizzazione σ_{p1} e σ_{p2} sulle superfici dei due dielettrici affacciate all'armatura 2.

Le armature 1 e 3 vengono ora collegate elettricamente tra loro. In questa nuova configurazione determinare:

- (d) le densità di carica libera σ_{l1} e σ_{l3} ora presenti sulle armature 1 e 3 rispettivamente;
- (e) il lavoro W_e compiuto dalle forze esterne per estrarre il dielettrico tra le armature 1 e 2.

Problema L



Due barrette S_+ ed S_- , ciascuna di lunghezza $L = 0.7$ m, sono allineate lungo l'asse x di una terna cartesiana ortogonale e disposte simmetricamente rispetto all'origine O , con gli estremi più vicini a questa nei punti di coordinate $x_+ = -x_- = 3$ cm. Le due barrette hanno carica opposta, con densità lineare di carica $\lambda_+ = -\lambda_- = 4.2 \times 10^{-8}$ C/m.

- (a) Determinare l'espressione analitica del vettore campo elettrico $\vec{E}$ generato dalle due barrette nel generico punto del piano yz , calcolando poi il valore numerico del suo modulo $|\vec{E}(0)|$ nell'origine. *Suggerimento: posto $R = \sqrt{y^2 + z^2}$, si sfruttino le simmetrie del problema per individuare direzione, verso e dipendenze rilevanti di $\vec{E}$.*

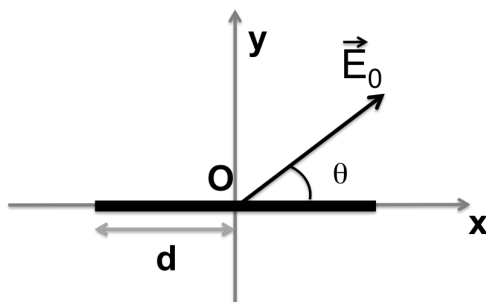
Un dipolo elettrico di momento di dipolo $\vec{p}$, con $p \equiv |\vec{p}| = 2.5 \times 10^{-13}$ C m, viene posto in O .

- (b) Determinare il periodo T delle piccole oscillazioni del dipolo, tenuto fermo in O ma libero di ruotare senza attrito attorno alla sua posizione di equilibrio, sapendo che il corrispondente momento di inerzia vale $I = 2.2 \times 10^{-10}$ kg m².

Il dipolo e la barretta S_- vengono ora rimossi ed un piano conduttore indefinito viene posizionato in corrispondenza del piano yz e mantenuto a potenziale nullo. Determinare, giustificando adeguatamente la risposta:

- (c) l'espressione analitica della densità superficiale di carica σ_{ind} indotta sul piano conduttore;
- (d) la carica totale Q_{ind} indotta sul piano conduttore.

Problema M



Una sbarretta omogenea di sezione trascurabile e lunghezza $2d = 16$ cm ha il centro nell'origine O di un sistema di riferimento cartesiano, è allineata all'asse x ed è carica con una densità lineare non uniforme $\lambda(x) = ax$, con $a = 12 \mu\text{C}/\text{m}^2$.

a) Determinare il momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ associato alla sbarretta.

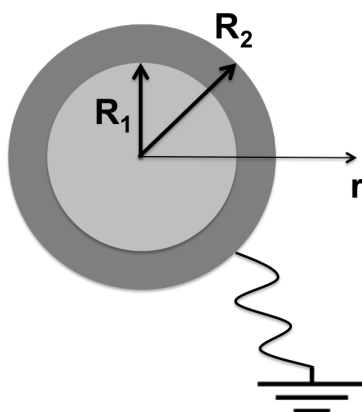
La sbarretta è immersa in un campo elettrico esterno uniforme e costante $\vec{E}_0$ parallelo al piano (xy) , di modulo $E_0 = 1200 \text{ V/m}$ e che forma un angolo orientato $\theta = \pi/6$ con l'asse x . Essa è libera di ruotare senza attrito attorno all'asse z . Determinare:

b) il momento risultante $\vec{\tau}$ delle forze elettriche agenti sulla sbarretta;

c) il lavoro meccanico esterno L_m necessario per ruotare la sbarretta fino alla posizione di equilibrio;

d) il periodo T delle piccole oscillazioni della sbarretta attorno alla posizione di equilibrio, nel caso in cui il suo momento di inerzia rispetto all'asse z sia $I_z = 4.5 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2$.

Problema N

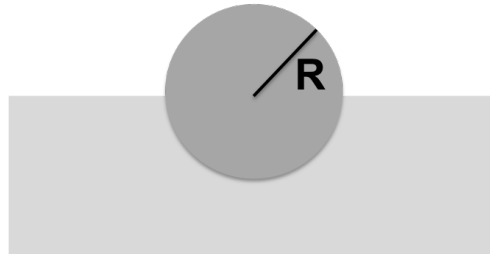


Un guscio sferico conduttore di raggio interno $R_1 = 4$ cm ed esterno $R_2 = 6$ cm è collegato a terra (convenzionalmente a potenziale $V_g = 0$). La sfera al suo interno è riempita da un isolante

con $\epsilon = \epsilon_0$ e densità di carica $\rho(r) = \alpha r$, dove $\alpha = -7.5 \times 10^{-5} \text{ C/m}^4$ e r è la distanza dal centro. Calcolare:

- (a) le densità di carica superficiali σ_1 e σ_2 sulle superfici del guscio sferico a $r = R_1$ e $r = R_2$;
- (b) il vettore campo elettrico $\vec{E}(r)$ per ogni $r \geq 0$, valutandolo poi numericamente per $r = R_1/2$;
- (c) il potenziale elettrostatico $V(r)$ per ogni $r \geq 0$ ed il suo valore in $r = 0$;
- (d) l'energia elettrostatica U del sistema.

Problema O



Una sfera conduttrice di raggio $R = 4.5 \text{ cm}$ viene caricata con una carica totale $Q = 8.2 \times 10^{-7} \text{ C}$ e sconnessa dal generatore. La sfera viene poi immersa per metà in un fluido dielettrico normale di costante dielettrica relativa $\kappa_e = 5.5$, mentre all'esterno c'è aria, con costante dielettrica assimilabile a quella del vuoto. Sfruttando la simmetria del problema e ricordando le relazioni di discontinuità dei campi, calcolare:

- (a) i campi spostamento elettrico $\vec{D}_a(r)$ e $\vec{D}_d(r)$ rispettivamente in aria e nel dielettrico ($r > R$), in particolare i loro moduli $|\vec{D}_a(2R)|$ e $|\vec{D}_d(2R)|$ ad una distanza $r = 2R$ dal centro della sfera;
- (b) il potenziale V_S della sfera, assumendo che $V(r)$ si annulli all'infinito;
- (c) le densità di carica superficiale libera della sfera in corrispondenza dell'aria ($\sigma_{l,a}$) e del dielettrico ($\sigma_{l,d}$);
- (d) la densità di carica superficiale di polarizzazione $\sigma_{p,d}$ del dielettrico affacciato alla sfera.